

Gödel und der Erweis des Geistes

1. Denken

Wie das Denken eigentlich denkt, das möchte wohl jeder gern verstehen, ja auch die Jugend bei einer Begegnung mit der Wissenschaftsministerin hat an dieser Frage besonderes Interesse bekundet, und die Ministerin will bei ihrer Forschungsförderung den Wünschen Rechnung tragen. Philosophen, Theologen, Logiker, Informatiker, Physiker und Biologen tragen das Ihre zu der Frage bei, verbreiten ihre Forschungen und Vorurteile in Bestsellern, und ab und an richtet uns jemand aus allen Beiträgen ein gefälliges Potpourri an, wie z.B. das Buch [H]. In solchen umfassenden Werken besonders ist an herausragender Stelle zumeist auch von Gödel die Rede, dass er nämlich nachgewiesen habe, dass der menschliche Geist zu Einsichten fähig sei, die kein Computer errechnen könne.

2. Gödel

Zwar spricht Gödel nicht über Computer, die es, als er seine Arbeit schrieb, noch nicht gab, sondern über Algorithmen, jedoch lässt sich sein Ergebnis an der inzwischen vertrauteren Vorstellung eines idealen Computers ebenso darstellen. Die Frage ist, ob wohl ein Computer mit genügend reicher Sprache und unbegrenzter Kapazität, wenn er nur geeignet programmiert ist, alle wahren Aussagen über Zahlen 1, 2, 3, ... beweisen kann. Gödel führt aus, dass man nur ein Alphabet mit den Ziffern 0, 1 braucht, wie es ja auch im Innern unserer Computer realisiert ist, und damit nach einander alle Zeichen der Sprache und dann auch alle Formeln, wie z.B.

$$(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 \tag{1}$$

in endliche Sequenzen der Zeichen 0, 1 übersetzen kann und damit alles, was überhaupt ein Computer aufschreiben kann, ebenso wohl erhält. Auch Beweise des Computers lassen sich dann als Sequenzen von solchen Zahlen, nach genau angebbaren Regeln erzeugt, beschreiben. So erweist sich, dass man die Begriffe „Formel“, „Beweis des Computers“, „vom Computer beweisbare Formel“ in der inneren Sprache des Computers ausdrücken kann. Jetzt stellt Gödel eine vom (ein für alle Mal programmierten) Computer unbeweisbare aber wahre Formel A vor, wie folgt: Zunächst nummeriert man alle möglichen Formeln mit nur einer Variablen, wie die obige Formel (1), so dass in einer unendlichen Sequenz

$$F_1, F_2, F_3 \dots \tag{2}$$

nacheinander alle auftreten. Das ist leicht möglich, denn letztlich ist ja jede dieser Formeln durch eine endliche Sequenz von Zeichen 0, 1 beschrieben. Jede Formel F_n enthält noch eine Variable, für die man eine Zahl q einsetzen kann, bezeichnet durch $F_n(q)$. Wäre z.B. F_7 die obige Formel (1) und $q = 37$, so wäre $F_7(37)$ die Formel

$$(37 + 1)(37 - 1) = 37^2 - 1$$

Jetzt erkläre eine Aussage K, eine Formel für Zahlen, folgendermaßen:

K gilt für die Zahl n nach Definition genau dann, wenn $F_n(n)$ vom Computer nicht beweisbar ist.

Auch diese Formel K ist in der Sprache des Computers aussprechbar, also diesem K entspricht in der Liste (2) aller Formeln eine Formel F_k für eine ganz bestimmte Zahl k . Mithin gilt:

$F_k(n)$ ist genau dann wahr, wenn $F_n(n)$ vom Computer nicht beweisbar ist.

Für $n = k$ ergibt sich durch Einsetzen:

$F_k(k)$ ist genau dann wahr, wenn $F_k(k)$ vom Computer nicht beweisbar ist.

Damit kann die Formel $A = F_k(k)$ vom Computer nicht beweisbar sein, denn sonst wäre $F_k(k)$ ja wahr, also nicht beweisbar. Andererseits aber ergibt sich, wie Gödel sagt, der „merkwürdige Umstand“, dass $F_k(k)$ doch sicher wahr ist, denn es ist ja in der Tat, wie eben festgestellt, vom Computer nicht beweisbar.

Mancherlei ließe sich noch hinzufügen, z.B. nützt es nichts, das Programm des Computers zu ergänzen; immer wieder könnte man ein neues solches Beispiel konstruieren. Die Definition der kritischen Formel A hat nicht etwa einen logisch unzulässigen Selbstbezug, wie es scheinen könnte. Die Regeln, nach denen der Computer mit seinem Programm arbeitet und beweist, kann man ja in der Sprache des Computers vollständig aufschreiben ohne auf diesen Bezug zu nehmen, und „beweisbar“ nennen, was nach diesen Regeln sukzessive entsteht. Erst die inhaltliche Interpretation offenbart, dass es sich hier um die tatsächlich vom Computer beweisbaren Formeln handelt. Dennoch hat der Trick, mit dem der Computer hereingelegt wird, eine unverkennbare Verwandtschaft mit dem in Logik und Mengenlehre schon zuvor und immer wieder auftretenden Krokodils-Schluss: Das Krokodil wird das Kind genau dann nicht fressen, wenn die Mutter errät, was es tun wird, und sie sagt: Du wirst es fressen.

3. Disput

Die Philosophie speist ja ihr Denken aus mancherlei Quellen: Formales Argumentieren *more geometrico* – nach Art der Mathematik – aber auch alte Erfahrung des Denkens, empirisches Wissen der Naturwissenschaften, und auch der gesunde Menschenverstand möchte sein Wort dazu geben.

Hier war also ein Argument *more geometrico*, und ein Philosoph, der es nicht zum ersten Mal hört, auch wohl auf mathematische Einzelheiten seine Aufmerksamkeit nicht allzu angestrengt richten mag, kommt während des Vortrags ins Sinnen über die Erfahrung seines Denkens und sagt: Dies ist ja eigentlich ein ontologischer Beweis für die Leistung von etwas Wirklichem, nämlich die Leistung des menschlichen Verstandes; ein Argument aus reinem Denken ohne alle Erfahrung, gerade so wie es Anselms Gottesbeweis war, der Schluss von dem Begriff eines Vollkommenen auf seine Existenz. Und ein solcher Beweis, so hat Kant dargetan, kann nur täuschen. Das Denken kann dem Seienden nicht mehr als die Form seiner Erscheinung *a priori* vorgeben.

So ermutigt durch hohe Autorität traut sich nun der gesunde Menschenverstand hervor, vielstimmig und etwas vorlaut, wie es seine Art ist: Der Gödel, so hören wir, was hat er denn bewiesen: dass er etwas kann, was mein Computer nicht kann, oder dass ich etwas kann, was mein Computer nicht kann? Wie will er denn das wissen, er kennt mich ja gar nicht. Und jedenfalls, tönt es wieder, kann mein Computer viel, was er und auch ich nicht können, darum habe ich ihn ja gekauft. Und überhaupt, kommt jetzt eine

aggressive Stimme, diese Mathematiker, die wollen wohl nur allein etwas Besonderes sein, von höherem Geiste und höherer Art, und wir anderen, die wir solche Verstandes-Knoten nicht auflösen können, sind wohl doch nicht besser als Automaten.

Hier erwacht der Mathematiker aus seinen Gedanken und ruft: Nein, nein, so ist es ja nicht ... ja doch freilich, die Mathematik ist etwas ganz Besonderes, eine Bewährung und höchste Leistung des menschlichen Geistes; aber doch nicht darum, weil sie sich mit einem Computer auf einen Zweikampf einließe und wie in einem Fernseh-Quiz ihm einen irrsinnig komplizierten, verknoteten und vollkommen sinnlosen Satz vorlegte, nur mit dem Ziel, ihn für dies Mal zum Scheitern zu bringen. Die Mathematik wie die höchste Kunst ist ein Erweis der Größe des menschlichen Geistes durch das Sinnvolle, Tiefe, Große und Ewige, durch die Schönheit und Aufklärung, die sie schafft, nicht aber durch das Produzieren verzwickter Krokodils-Aufgaben in einer Umgebung von Vexierbildern. Und in der Tat könnte es keinem Menschen gelingen, den Satz des Gödelschen Beweises wirklich auszusprechen.

Hier meldet sich ein Philosoph zu Wort, der all sein wissenschaftliches Bestreben daran gesetzt hat, durch Klärung vieldeutiger Begriffe alle Aporien des Geistes aufzulösen, und trägt vor: Ich denke, dass wir hier einer sprachlichen Äquivokation, einer Mehrdeutigkeit der Wörter, zum Opfer fallen. Der Mathematiker, wenn er sagt: man kann ..., oder gar, ich kann ..., wir können ..., so meint er nicht, dass er das wirklich in jedem Falle oder auch nur in sehr vielen Fällen könne. Ein Beispiel: Man kann eine Zahl, die größer als 1 ist, in Primfaktoren zerlegen. Gewiss, ganz einfach, das haben wir ja in der Schule gelernt und oft genug gemacht, man kann – aber tatsächlich kann man das eben nicht. An einer sehr großen Zahl, die man aber doch durchaus noch hinschreiben und mit der man rechnen kann, scheitert man bei der Aufgabe auch wenn man seinen Computer zu Hilfe nimmt. Darauf beruht die Sicherheit der heutigen Kryptographie, die Sicherung auch Ihres Bankkontos. Wenn der Mathematiker sagt: man kann ..., so meint er eigentlich, dass man ein Verfahren beschreiben kann, das, lange genug angewendet, das gewünschte Ergebnis liefern würde. Man „kann“ beliebig weit zählen, aber tatsächlich kann man nicht bis 2^{50} zählen. So „kann“ in Gödels Beweis der Mathematiker den Algorithmus, nach dem der Computer arbeitet, vollständig sehen, aufschreiben und daraus seine Krokodils-Aufgabe basteln, während der Computer freilich dem Mathematiker nicht in den Kopf schauen kann.

Eigentlich besagt Gödels Argument also: Ein gedachter (unter anderem ewig lebender und unendlich geduldiger) Mathematiker kann einen Satz formulieren, der wahr ist, den aber der betroffene Computer nicht herleiten kann. Was hilft das uns, die wir nicht gedacht sondern wirklich sind?

4. Konklusion

So also scheitert der Versuch, uns nur auf Gödels Flügeln zu höherer geistiger Selbsteinschätzung zu erheben. Gödel übrigens ist an dem Missbrauch seines Namens unschuldig. Er hat als junger Mann von 25 Jahren eine zweiteilige Arbeit veröffentlicht, in der er unter Anderem die Unvollständigkeit aller genügend ausdrucksfähigen, aber auch in den sprachlichen Mitteln voll formalisierten, logischen Algorithmen beweist. Die Arbeit wurde die Grundlage für zahlreiche Ergebnisse über Unentscheidbarkeit, über die Unmöglichkeit, zur Lösung von mathematischen Aufgaben, die manchmal einfach genug aussehen, Algorithmen zu finden. Die philosophische Deutung wurde, soweit ich sehe, zu erst von Lucas [L] öffentlich ausgesprochen. Sollen wir nun sagen: sie ist einfach verfehlt, ein Flop? Denken

wir noch einmal an Anselms Beweis für die Existenz Gottes. Der Beweis hat gewiss keinen Ungläubigen bekehrt und keinen Verzweifelten getröstet. Wohlverwahrt in Büchern und Papier überstand er alle Glaubenswirren des Mittelalters, alle Ketzerkämpfe, die Reformation und Gegenreformation, bis ihn Kant aus dem Bücherschrank in den Papierkorb beförderte, eine längst vertrocknetet Mumie der Geistesgeschichte. Und doch ist dieser Beweis von tiefer symbolischer Bedeutung: Er kennzeichnet als ihr Grundstein die Scholastik, in der das Christentum zu einem geordneten und total rationalen Gebäude der europäischen Universitäts-Gelehrsamkeit werden sollte. So ist auch der Versuch, die Besonderheit des menschlichen Geistes mit einem Krokodils-Schluss nach Gödel zu beweisen, von tiefer symbolischer Bedeutung für unsere Situation, die Situation des Menschen, der sich vom Automaten, einem Industrie-Produkt, nicht mehr recht zu unterscheiden weiß. Kein Arbeiter in automatisierter Umgebung wird daran Trost und Erbauung finden.

Literatur

- [G] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Mh. Math. Phys.* 38, 173-198 (1931)
- [H] Hofstadter, D.: Gödel, Escher, Bach. Basic Books Publ. (1979)
- [L] Lucas, J.: Minds, Machines, and Gödel. In: Anderson, A. R.: *Minds and Machines*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J. (1964)