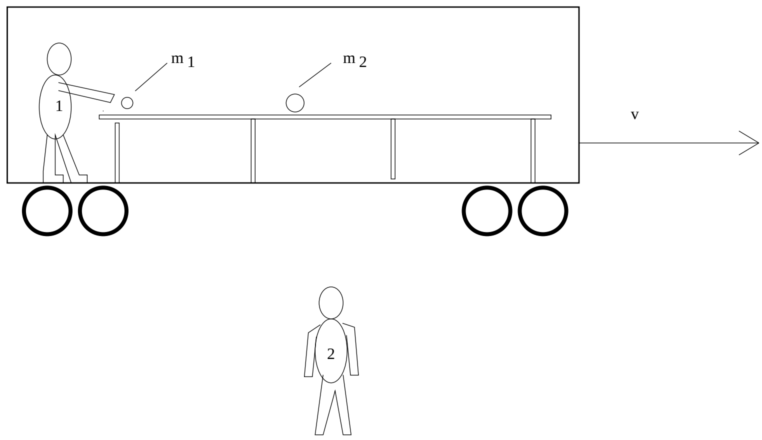
Wechsel des Inertialsystems bei der Betrachtung eines Experiments (klassische Physik).

In der klassischen, nichtrelativistischen Physik sollen sich bei einem Wechsel des Inertialsystems keine Änderung der Formeln zur Beschreibung eines beliebigen mechanischen Vorganges ergeben. In der klassischen Physik sind Inertialsysteme gekennzeichnet durch ein Koordinatensystem, in dem der Newtonsche Trägkeitssatz gilt, und eine Uhr. Bei einem Wechsel des Inertialsystems von einem Beobachter 1 zu einem dazu gleichförmig bewegten Beobachter 2 bleibt die Zeit gleich ($t = t_{\#}$), meist ebenso 2 der drei Raumachsen ($\vec{y} = \vec{y_{\#}}$ und $\vec{z} = \vec{z_{\#}}$). Das zweite System (alle Größen mit #) ist gegen das erste System in einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der $\vec{x}$-Achse, daher ist $\vec{x}_{\#} = \vec{x} + \vec{v} \cdot t$. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen. Hier soll nun ein einfaches Beispiel für ein Experiment betrachtet werden, welches von 2 verschiedenen Inertialsystemen aus betrachtet wird: In einer gleichförmig dahinrollenden Straßenbahn wird ein elastischer Stoß zwischen einer Kugel mit der Masse $m_1$und einer zweiten Kugel mit der Masse $m_2 = 2 \cdot m_1$ beobachtet (siehe Skizze). In den beiden Inertialsystemen gelten Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie.



Situation für Beobachter 1 in der Straßenbahn: Geschwindigkeit der Kugel 1 vor dem Stoß: $\vec{v}_1$, Geschwindigkeit der Kugel 2 vor dem Stoß: $\vec{v}_2$, hier speziell: $\vec{v}_2 = 0$ Geschwindigkeit der Kugel 1 nach dem Stoß: $\vec{v}'_1$ Geschwindigkeit der Kugel 2 nach dem Stoß: $\vec{v}'_2$

Die Situation für den Beobachter 2 auf der Staße sieht ähnlich aus, er muß die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Bahn vektoriell zu jeder von Beobachter 1 festgestellten Geschwindigkeit hinzuaddieren, beispielsweise ist $\vec{v}_{1\#} = \vec{v}_1 + \vec{v}$. und $\vec{v}_{2\#} = \vec{v}$. Die Aufgabe für die beiden Beobachter ist es nun, die Geschwindigkeiten der 2 Kugeln nach dem elastischen Stoß zu berechnen.

Beobachter 1 rechnet: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$ (Impulserhaltung), und $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{2'} + \frac{1}{2}m_2v_1^{2'}$ (Energieerhaltung). Da hier 2 unbekannte vorliegen, müssen die beiden Formeln auf eine möglichst einfache Weise kombiniert werden, dazu wird zuerst der Faktor $1/2$ aus dem Energiesatz weggekürzt und beide Ausdrücke werden nach der Masse sortiert:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)$$

und

$$m_1(v_1^2 - v_1^{2'}) = m_2(v_2^{2'} - v_2^2)$$

Diese beiden Gleichungen haben große Ähnlichkeit und lassen sich mit einer kleinen Umformung zusammenfassen, indem eine komplette Seite des umgeformten Impulserhaltungssatzes eingesetzt wird:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)(\vec{v}'_2 + \vec{v}_2)$$

$$\Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}'_2 + \vec{v}_2)$$

Dieser Ausdruck wird jetzt nach $\vec{v}'_2$ umgeformt, dabei kann ein großer Teil gekürzt werden:

$$\frac{m_1(\vec{v_1} - \vec{v_1}')(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1)}{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)} = \vec{v}'_2 + \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}'_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}'_2$$

Diese Beziehung wird jetzt für $\vec{v}'_2$ in den Impulserhaltungssatz eingesetzt, das ergibt:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_2) \Rightarrow m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}'_1 + m_1\vec{v}'_1$$

Nach $\vec{v}'_1$ umgeformt ergibt sich:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Dieser Ausdruck gilt bislang noch ganz allgemein, d.h. es sind bislang noch keinerlei spezielle Daten für die Massen oder für die Geschwindigkeiten vor dem Stoß eingesetzt worden. Das könnte jetzt erfolgen, um $\vec{v}'_1$ endgültig zu berechnen. Ansonsten kann dieser Ausdruck jetzt in die Formel für $\vec{v}'_2$ eingesetzt werden, das ergibt dann den folgenden allgemeingültigen Ausdruck:

$$\vec{v}'_2 = \frac{m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_2 + m_1} + \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Setzt man nun die vorgegebenen Daten für Massen und Geschwindigkeiten ein, so reduzieren sich die Ausdrücke für $\vec{v}'_1$ und $\vec{v}'_2$ auf:

$$\vec{v}'_1 = \frac{(-\vec{v}_1)}{3}$$

und

$$\vec{v}'_2 = \frac{2\vec{v}_1}{3}$$

Damit ist der erste Teil für Beobachter 1 fertig, nun kommt die gleiche Betrachtung für den Beobachter 2. Dieser verwendet die gleichen Erhaltungssätze, allerdings mit seinen gemessenen Werten.

Beobachter 2 rechnet:

$$m_1\vec{v}_{1\#} + m_2\vec{v}_{2\#} = m_1\vec{v}'_{1\#} + m_2\vec{v}'_{2\#}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1\#}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2\#}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1\#}^{2'} + \frac{1}{2}m_2 v_{2\#}^{2'}$$

Diese Sätze werden in der gleichen Weise zusammengesetzt wie bei Beobachter 1, dies ergibt (Zwischenschritte wie oben):

$$\vec{v}'_{2\#} = \vec{v}_{1\#} + \vec{v}'_{1\#} - \vec{v}_{2\#}$$

Für den Beobachter 2 fällt keine der Geschwindigkeiten weg, da er immer die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Bahn dazuaddieren muß. Da die obige Rechnung von Beobachter 1 bis auf die letzten Schritte eine allgemeine Lösung darstellt und das Wegfallen einer Gewschwindigkeit daher auch nicht voraussetzt, können wir weiter nach dem gleichen Schema vorgehen. Nach $v'_{1\#}$ umgeformt ergibt sich:

$$\vec{v}'_{1\#} = \frac{m_1\vec{v}_{1\#} - m_2\vec{v}_{1\#} + 2m_2\vec{v}_{2\#}}{m_2 + m_1}$$

Nun werden zuerst die Werte für die Massen eingesetzt, dies ergibt:

$$\vec{v}'_{1\#} = \frac{-\vec{v}_{1\#} + 4\vec{v}_{2\#}}{3}$$

$$\vec{v}'_{2\#} = \vec{v}_{1\#} - \vec{v}_{2\#} + \frac{(-\vec{v}_{1\#} + 4\vec{v}_{2\#})}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{v}'_{2\#} = \frac{3\vec{v}_{1\#} - \vec{v}_{1\#} + \vec{v}_{2\#}}{3} = \frac{2\overrightarrow{v_{1\#}} + \overrightarrow{v_{2\#}}}{3}$$

Jetzt werden als letztes die Geschwindigkeiten eingesetzt, wie oben vorgegeben:

$$\vec{v}'_{1\#} = \frac{-(\vec{v}_1 + \vec{v}) + 4(\vec{v}_2 + \vec{v})}{3}$$

bzw.

$$\vec{v}'_{2\#} = \frac{2(\vec{v}_1 + \vec{v}) + (\vec{v}_2 + \vec{v})}{3}$$

Als letztes wird für $\vec{v}_2$der Wert 0 eingesetzt, die Ausdrücke vereinfachen sich damit zu

$$\vec{v}'_{1\#} = \frac{-\vec{v}_1 + 3\vec{v}}{3} \Rightarrow \vec{v_1}' + \vec{v} = \vec{v} + \frac{-\vec{v_1}}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{v_1}' = \frac{-\vec{v_1}}{3}$$

$$\vec{v}'_{2\#} = \frac{2\vec{v}_1 + 3\vec{v}}{3} \Rightarrow 3\vec{v_2}' + 3\vec{v} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v_2}' = \frac{2\vec{v_1}}{3}$$

Ergebnis: Diese beiden letzten Ausdrücke zeigen, das der zweite Beobachter genau zu den gleichen Schlußfolgerungen gelangt wie der erste, d.h. in beiden Inertialsystemen herrschen die gleichen Naturgesetze. Die oben genannte Umrechnung zwischen für die Raum-und Zeitkoordinaten zwischen den beiden Beobachtern wird auch als Galilei-Transformation bezeichnet. In der Relativitätstheorie wird diese durch die Lorentz-Transformation ersetzt, diese berücksichtigt die Tatsache, daß es keine Geschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit geben kann.