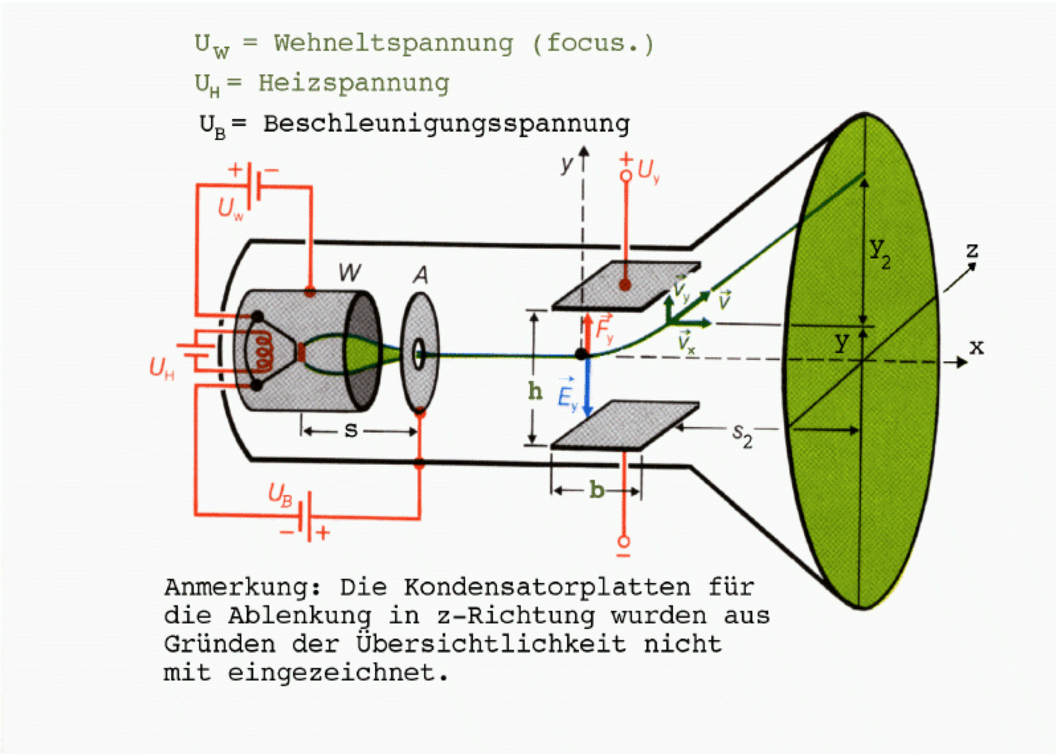
Herleitung zum Experiment: Oszilloskop

1 Grundsätzliches Funktionsprinzip:

Das Oszilloskop ist ein weit verbreitetes elektronisches Meßgerät, bei dem ein Elektronenstrahl auf einem Bildschirm eine graphische Darstellung vom Verlauf elektrischer Spannungen erzeugt. Meistens wird dabei die horizontale Achse von einer eingebauten, einstellbaren Zeitbasis gesteuert, dadurch entsteht auf dem Schirm ein U(t)-Diagramm des angeschlossenen elektrischen Signals. Den Aufbau des Gerätes zeigt die folgende Skizze, diese zeigt die Röhre mit dem Elektronenstrahl. Dieser Elektronenstrahl wird zunächst in der x-Richtung elektrisch beschleunigt und dann durch zwei Plattenkondensatoren in y-und z-Richtung abgelenkt. für diese Bewegung der Elektronen in den 3 Raumrichtungen gilt ein ***Unabhängigkeitsprinzip***; d.h. man darf die 3 Bewegungskomponenten separat berechnen und sich die tatsächliche Bewegung im Raum als eine Überlagerung der 3 Einzelkomponenten vorstellen.



2 Berechnung der Bahnbewegung.

2.1 Beschleunigung in x-Richtung.

Für die Beschleunigung der Elektronen nimmt man ein homogenes elektrisches Feld an, dies gilt für alle drei Raumrichtungen. Der Wehneltzylinder W in der Abbildung dient zur Bündelung (Focussierung) der Elektronen, er hat auf den Beschleunigungsvorgang aber keinen weiteren Einfluss. Für den Plattenkondensator sind die Formeln $U = E \cdot d$ und $F_{el} = E \cdot q$ gültig, außerdem gilt noch $W_{el} = U \cdot q$. Für die Ladung q ist hier jeweils die Ladung eines Elektrons einzusetzen, also $q = 1e$. Da die elektrischen Kräfte innerhalb der Plattenkondensatoren wegen des homogenen elektrischen Feldes konstant bleiben, ergibt sich für die Elektronen eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, diese ist wegen der negativen elektrischen Ladung des Elektrons entgegen der Feldlinienrichtung gerichtet. Geschwindigkeitskomponenten quer zur Feldlinienrichtung bleiben jeweils unbeeinflusst. Aus dem Bereich der Mechanik gelten somit dir folgenden Gleichungen:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2;\ F = m \cdot a;\ v = a \cdot t;\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Diese Gleichungen haben nun 2 Berührungsstellen, an denen man die Mechanik mit der Elektrizität verbinden kann: 1) Die durch das elektrische Feld am Elektron verrichtete Arbeit wird in Bewegungsenergie umgewandelt, hierbei gilt wegen der reibungsfreien Bewegung in der evakuierten Röhre die Energieerhaltung; also $W_{el} = W_{kin}$. 2) Außerdem wird die vom elektrischen Feld aufgebrachte Kraft benutzt, um das Elektron zu beschleunigen, also gilt $F = F_{el}$. Benutzt man die Energiegleichung, kommt man schon nach wenigen Schritten zur Geschwindigkeit in x-Richtung (Voraussetzung ist, das das Elektron das gesamte elektrische Feld im Beschleunigungskondensator durchläuft):

$$W_{el} = W_{kin} \Rightarrow U_B \cdot e = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2 \cdot U_B \cdot e}{m_e}}$$

Alternativ könnte man hier auch mit der Kräftegleichung arbeiten, dies wird hier als Beispiel ebenfalls gezeigt:

$$F = F_{el} \Rightarrow m_e \cdot a = e \cdot E \Rightarrow a = \frac{e \cdot E}{m_e}$$

Mit dieser Gleichung wird die Beschleunigung des Elektrons berechnet. Nun kann mit den 2 Bewegungsgesetzen die Geschwindigkeit ermittelt werden:

$$v_x = a \cdot t \Rightarrow v_x^2 = a^2 \cdot t^2,$$

mit

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot s}{a}$$

zusammengesetzt ergibt sich $v_x^2 = a \cdot 2 \cdot s$, als letztes wird die Beschleunigung eingesetzt:

$$v_x^2 = 2 \cdot s \cdot \frac{e \cdot E}{m_e}$$

Berücksichtigt man die Tatsache, das $U_B = E \cdot d$ gilt und der Weg s des Elektron hier identisch mit d ist, kommt man zu dem gleichen Ausdruck wie oben: $v_x^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}$

2.2 Berechnung derBewegung in y-und z-Richtung.

Ab jetzt kann die Geschwindigkeit in x-Richtung als bekannt vorausgesetzt werden, nun sollen die seitliche Ablenkung y und die Geschwindigkeit v_y berechnet werden. Diese Rechnung gilt ebenso für die z-Achse, daher wird sie nur einmal gemacht. Die Länge der Kondensatorplatten in x-Richtung sei b, der Plattenabstand sei h. Da der Elektronenstrahl nicht das gesamte elektrische Feld in y-Richtung durchläuft, kann jetzt nur noch der Kräfteansatz benutzt werden (vergleiche oben).

$$a_y = \frac{e \cdot E_y}{m_e};\ y = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2;\ v_y = a_y \cdot t$$

Die zur Berechnung notwendige Zeit t ist die Durchflugzeit des Elektrons, sie kann mit der nun gleichförmigen Bewegung in x-Richtung berechnet werden:

$$b = v_x \cdot t \Rightarrow t = \frac{b}{v_x}$$

Somit ergeben sich folgende Formeln für y und v_y:

$$y = \frac{e \cdot E_y . b^2}{2 \cdot m_e \cdot v_x^2} = \frac{e \cdot b^2 \cdot U_y}{2 \cdot m_e \cdot v_x^2 \cdot h}; \; v_y = \frac{e \cdot E_y \cdot b}{m_e \cdot v_x} = \frac{e \cdot b \cdot U_y}{m_e \cdot v_x \cdot h}$$

Für die Bewegung in der z-Richtung sehen die Formeln genauso aus, nur die Indizes für y werden gegen z ausgetauscht.

2.3 Zusammenfügen der Bewegungskomponenten.

Als letztes sollen noch die Gesamtgeschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ und die Ablenkungen y_2 und $z_2$ermittelt werden. Die in x-Richtung noch zurückzulegende Strecke sei s_2, auch hier gilt wieder das Unabhängigkeitsprinzip. Im letzten Teil der Bildröhre findet eine gleichförmige Bewegung statt, d.h. die eben errechneten Werte für v_x , v_y und v_z ändern sich nicht mehr. Der Betrag der Gesamtgeschwindigkeit $\overrightarrow{v}$ kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Für die Strecke $s_2$in x-Richtung gibt es nun eine Zeit $t_2 = \frac{s_2}{v_x}$, diese ergibt dann die Strecken

$$y_2 = v_y \cdot t_2 = \frac{v_y \cdot s_2}{v_x} \; bzw. \; z_2 = \frac{v_z \cdot s_2}{v_x}$$

Damit sind die Bewegungen in der Röhre vollständig durch Gleichungen beschrieben.