Formelsammlung Fourier-Laplace

Basis: Vorlesung Fourier-Laplace
von Prof. Dr. K. Brinkmann, FH Wedel

Stand: SS 2002

Zusammengestellt von Roland Wiebicke
roland@wiebickeweb.de

Formelsammlung Fourier- Laplace

1. Fourier - Entwicklungen (Bronstein S. 415 ff.)

1.1 Trigonometrische Summe = Fourierreihe

Die Funktion y =f(x) sei in $0 \le p \le 2p$ definiert und integrierbar und **periodisch** in $2p$.
=> beste Approximation nach Gauß durch trigonometrische Summe

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx) \right]$$

mit $a_0 = \frac{1}{p} \int_{x=0}^{2p} f(x)dx$

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{x=0}^{2p} f(x)\cos(kx)dx$$; k=**0**,1,2,3,...,n ; bei ungerader Funktion sind alle a_k's=0

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{x=0}^{2p} f(x)\sin(kx)dx$$; k=1,2,3,...,n ; bei gerader Funktion sind alle b_k's=0

Vereinfachung: (ACHTUNG! Nicht immer möglich!)

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{x=0}^{p} f(x)dx \quad ; \quad a_k = \frac{2}{p} \int_{x=0}^{p} f(x)\cos(kx)dx \quad ; \quad b_k = \frac{2}{p} \int_{x=0}^{p} f(x)\sin(kx)dx$$

1.2 Symmetrien

Gerade Funktion: Funktion ist **symmetrisch zur y-Achse**
➔ b_k's=0 f(x) = f(-x)

Ungerade Funktion: Funktion ist **symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems**
➔ a_k's=0 -f(x) = f(-x)

1.3 Faktoren bei der Fourierreihe

	k gerade	k ungerade	Vorzeichenfaktor
ak / bk	< 0	> 0	$(-1)^{m+1}$
ak / bk	> 0	< 0	$(-1)^{m}$

	k gerade	k ungerade	k ersetzen durch
ak / bk	<> 0	0	2m
ak / bk	0	<> 0	2m-1

1.4 Linienspektrum (nur für positive Werte von m)

Auf der y-Achse werden die Werte für $c_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ abgetragen, auf der x-Achse die Werte für $w_m = m * w$. Bei a_m und b_m werden nur die ermittelten Formeln für a_k und b_k verwendet, nicht die angepassten Formeln für a_m und b_m in der Gleichung g(x)=....

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \quad \text{für m=1, 2, 3, ...}$$

Beim Linienspektrum gibt es nur positive Werte für c_m .

1.5 Spektralfunktion (S_C bzw. S_S) und Fourierintegral (F(t))

Die Funktionen sind **nicht mehr periodisch** ➔ unendliche Periodendauer (=Schwingungsdauer)

gerade Funktion: $F(t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{w=0}^{\infty} S_C(w)\cos(wt)dw$ mit $S_C = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{t=0}^{\infty} F(t)\cos(wt)dt$

ungerade Funktion: $F(t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{w=0}^{\infty} S_S(w)\sin(wt)dw$ mit $S_S = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{t=0}^{\infty} F(t)\sin(wt)dt$

S_C – Kosinus- Spektralfunktion
S_S – Sinus- Spektralfunktion

1.6 Berechnung der Spektralfunktion = Kontinuierliches Spektrum

- nur für $w \geq 0$
- w auf der x-Achse, $|S(w)|$ auf der y-Achse abtragen
- $\lim_{w \to 0} S_w$ gibt den Achsenabschnitt auf der y-Achse an

  (Hinweise: $\lim_{w \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{w \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; $\sin(w) \approx w$ für w <<1)
- Nullstellen ($f(x) = 0$), Extrema ($f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$), Wendepunkte ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$) über die Kurvendiskussion; evtl. Einhüllende
- $|S(w)| = \sqrt{S_c^2(w) + S_s^2(w)}$

1.7 Von „periodisch in a" in „periodisch in 2p" umwandeln (Beispiel: ÜA 15*)

$f(x + ak) = g(x^* + 2pk)$ hier: periodisch in a

$$(x + ak) = a(\frac{x}{a} + k) = \frac{a}{2p}(\frac{2p * x}{a} + 2pk) = \frac{a}{2p}(x^* + 2pk)$$

$$x^* = \frac{2p * x}{a} \quad ; \quad x = \frac{a * x^*}{2p}$$

$$f(x + ak) = f(\frac{a}{2p}(x^* + 2pk)) = g(x^* + 2pk)$$

$$f(x) = f(\frac{a}{2p} * x^*) = g(x^*)$$

Ausdruck für x in f(x) einsetzen, Transformation der Grenzen

2. Laplace - Transformation (Bronstein S. 708 ff.)

2.1 Laplace Transformierte

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t) * e^{-pt} dt$$

2.2 Ähnlichkeitssatz

$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} * F(\frac{p}{a})$ Vorraussetzung: $L\{f(t)\} = F(p)$; (Spezialfall vom Verschiebungssatz: $a_0 = 0$)

2.3 Verschiebungs- und Ähnlichkeitssatz (Nur Verschiebung: $a_1 = 1$)

$$L\{f(a_1 t - a_0)\} = \begin{cases} \frac{1}{a_1} * e^{-\frac{a_0 p}{a_1}} * F(\frac{p}{a_1}) & \text{für } a_0 > 0 \\ \frac{1}{a_1} * e^{-\frac{a_0 p}{a_1}} * \left[F(\frac{p}{a_1}) - \int_{t=0}^{-a_0} f(t) * e^{-\frac{pt}{a_1}} dt \right] & a_0 < 0 \end{cases} \quad (a_0 \in R)$$

2.4 Dämpfungssatz

$$L\{e^{-dt} f(t)\} = F(p+d)$$

2.5 Eigenschaften der Laplace- Transformation

$L\{f_1 + f_2\} = L\{f_1\} + L\{f_2\}$ (Linearität)

$L\{f_1 * f_2\} = L\{f_1\} * L\{f_2\}$

$L\{c * f\} = c * L\{f\}$ (Linearität)

2.6 Differentiation im Originalraum

$$L\{f'(t)\} = p * L\{f(t)\} - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = p^2 * L\{f(t)\} - p * f(0) - f'(0)$$

$$L\{f'''(t)\} = p^3 * L\{f(t)\} - p^2 * f(0) - p * f'(0) - f''(0)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n * L\{f(t)\} - p^{n-1} * f(0) - p^{n-2} * f'(0) - .... - f^{(n-1)}(0)$$

$$= p^n * L\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} \left[p^{n-1-i} * f^{(i)}(0) \right]$$

2.7 Differentiation im Bildraum

$$F'(p) = -L\{t * f(t)\}$$

2.8 Lösung eines Gleichungssystems mit Differentialgleichungen

- allgemeine Gleichungen in den Laplace- Raum transformieren
- Gleichungssystem lösen (L{y}, L{z} bestimmen)
- Koeffizienten aus der Partialbruchzerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen
- Rücktransformation (p → t)

2.9 Faltungsprodukt (Bronstein S.711)

$$f_1 * f_2 = \int_{t=0}^{t} f\,(t) * f_2(t-t)\,dt$$

Eigenschaften des Faltungsproduktes:

Kommutatives Gesetz: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

Assoziatives Gesetz: $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

Distributives Gesetz: $(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$

2.10 Grundlegende Transformationen (Bronstein S. 1063 ff.)

- $L\{0\} = 0$
- $L\{1\} = \frac{1}{p}$
- $L\{t\} = \frac{1}{p^2}$
- $L\{\sin(at)\} = \frac{a}{p^2 + a^2}$
- $L\{\cos(at)\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$

3. Wichtige Zusatzformeln

3.1 Beziehungen zwischen Winkelfunktionen (Bronstein S.78 ff.)

- $\cos x = \sin\left(x + \frac{p}{2} \right)$
- $-\cos x = \sin\left(x - \frac{p}{2} \right)$
- $\sin x = \cos\left(x - \frac{p}{2} \right)$
- $-\sin x = \cos\left(x + \frac{p}{2} \right)$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 * \cos x_2 \pm \cos x_1 * \sin x_2$
- $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 * \cos x_2 \mp \sin x_1 * \sin x_2$
- $\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = 2 * \cos x_1 * \cos x_2$
- $\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2 * \sin x_1 * \sin x_2$
- $\tan(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 * \tan x_2}$
- $\sin(2x) = 2 * \sin x * \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \cos 2x$ (Bronstein S.80)
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \cos 2x$

3.2 Zusammenhang zwischen e-Funktionen und Winkelfunktionen / Hyperbolischen Funktionen (Bronstein S.86)

- $e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$ (nach Euler)
- $e^{-jwt} = \cos(wt) - j\sin(wt)$ (nach Euler)
- $\cos(wt) = \left(\dfrac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} \right)$
- $\sin(wt) = \left(\dfrac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} \right)$
- $\sinh(wt) = \left(\dfrac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} \right)$
- $\cosh(wt) = \left(\dfrac{e^{wt} + e^{-wt}}{2} \right)$

3.3 Rechnen mit e-Funktionen

- $e^{jwt} * e^{-pt} = e^{t(jw-p)}$

3.4 Winkelfunktion ⇔ Hyperbolische Funktionen (Bronstein S. 89)

- $\cos z = \cosh iz$
- $\cos iz = \cosh z$
- $\sin z = -i * \sinh iz$
- $-i * \sin iz = \sinh z$

3.5 Partialbruchzerlegung (Bronstein S. 14)

1) $\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2 + a_1 p + b_1} + \frac{Fp+G}{p^2 + b_2} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{p * p^2 * (p-1) * (p^2 + a_1 p + b_1) * (p^2 + b_2)}$

2) $\frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2 + b^2} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{(p-1) * (p-1)^2 * (p^2 + b^2)}$

3.6 Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b) * (a-b) = a^2 - b^2$

3.7 PASCALsches Dreieck (Bronstein S. 12)

Ausmultiplizieren der Formel: $(a+b)^n$

n	Koeffizienten
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
etc.	

3.8 Integralrechnung

- $\int u * v' = u * v - \int u' * v$ (Partielle Integration / Produktintegration)

4. Hinweise

- Die Seitenangaben für das Taschenbuch der Mathematik („Bronstein") beziehen sich auf die 4. überarbeitete Auflage von 1999

- Literaturhinweis: **Taschenbuch der Mathematik**
  Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig
  Verlag Harri Deutsch
  4. überarbeitete Auflage 1999, **NEU: 5. Auflage 2001**