

Darstellungstheorie 1 von Prof. Hiß

Mitschrift von SEBASTIAN STIGLER

14. Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
ToDo Liste	vii
Notation	ix
1 Strukturen von Gruppenalgebren	1
§1 Einführung	1
§2 Moduln und Algebren	4
§3 Der Gruppenring	10
§4 Halbeinfache Moduln und Algebren	12
2 Die Charaktertafel	19
§1 Die irreduzibelen Charaktere	19
§2 Die Charaktertafel	22
§3 Die Orthogonalitätsrelationen	24
§4 Charaktertafel und Faktorgruppen	28
§5 Charaktertafel und Zentrum	31
§6 Ganze algebraische Zahlen	32
§7 Die zentralen Charaktere	32
§8 Strukturkonstanten und Charaktertafel	32
§9 Endomorphismusalgebra von Permutationsmoduln	32
3 Konstruktion von Charakteren	33
§1 Einige Konstruktionen	33
§2 Der Frobenius-Schur Indikator	33
§3 Involutionen	33
§4 Der Satz von Burnside-Brauer-Steinberg	33
§5 Charaktere von direkten Produkten	33
§6 Permutationscharaktere	33
§7 Frobeniusgruppen	33

§8	Der Satz von Mackey	33
§9	Die irreduzibelen Darstellungen von S_n	33
4	Clifford Theorie	35
§1	Der Satz von Clifford	35
§2	Projektive Darstellungen	35
§3	Fortsetzbarkeit von Darstellungen	35
§4	Der Schursche Multiplikator	35
5	Der Brauersche Induktionssatz	37
§1	Brauersche Charakterisierung von Charakteren	37
§2	Defekt-0-Charaktere	37
§3	Zerfällungskörper	37
§4	Burnsides Verlagerungssatz	37
§5	Der Satz von Brauer-Suzuki	37
Anhang		I
	Stichwortverzeichnis	II
	Literaturverzeichnis	III

Vorwort

Diese Skript enthält den Inhalt der Vorlesung „Darstellungstheorie 1“ des Wintersemester 2003/2004 von Prof. Hiß. Es wurde anhand meiner Mitschrift von mir in \LaTeX gesetzt und erhebt daher keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Teilweise wurden (zur besseren Verständlichkeit wie ich hoffe) einige Veränderungen im Wortlaut vorgenommen. Auch einige Formulierungen in den Beweisen habe ich verändert um von einem rein in Symbolen geführten Beweis, zu einem mit –mehr oder weniger– vollständigen Sätzen zu kommen. Die Graphen und Diagramme wurden mit Hilfe von \Xypic erstellt.

Dieses Skript stellt keine offizielle Veröffentlichung der RWTH Aachen dar.

Letzte Änderung: 14. Mai 2004

Downloadbar unter <http://home.arcor.de/sebastian.stigler>

Korrekturen und Anmerkungen an:
Sebastian Stigler: sebastian.stigler@lantis.de

ToDo Liste

Vorwort	v
Kapitel 1	1
Kapitel 1 §1	4
Matrix zur Bemerkung von Def (1.9)	7
Kapitel 1 §2	10
Kapitel 1 §3	12
Vergleich den Beweis von (1.21) mit der Mitschrift von Markus	16
Kapitel 1 §4	17
Kapitel 2	19
Kapitel 2 §1	22
Markus: letzter Satz vor (2.8) lautet?	23
Kapitel 2 §2	24
Markus: $gx = x$ oder $gx \neq x$ bei (2.9) ?	25
Kapitel 2 §3	28
Kapitel 2 §4	31
<u>Kapitel 2 §5 fertigmachen</u>	31
Kapitel 2 §6	32
Kapitel 2 §7	32
Kapitel 2 §8	32
Kapitel 2 §9	32
Kapitel 3	33
Kapitel 3 §1	33
Kapitel 3 §2	33
Kapitel 3 §3	33
Kapitel 3 §4	33
Kapitel 3 §5	33
Kapitel 3 §6	33
<u>Kapitel 3 §1 fertigmachen</u>	33
Kapitel 3 §8	33
Kapitel 3 §9	33
Kapitel 4	35

Kapitel 4 §1	35
Kapitel 4 §2	35
Kapitel 4 §3	35
Kapitel 4 §4	35
Kapitel 5	37
Kapitel 5 §1	37
Kapitel 5 §2	37
Kapitel 5 §3	37
Kapitel 5 §4	37
Kapitel 5 §5	37

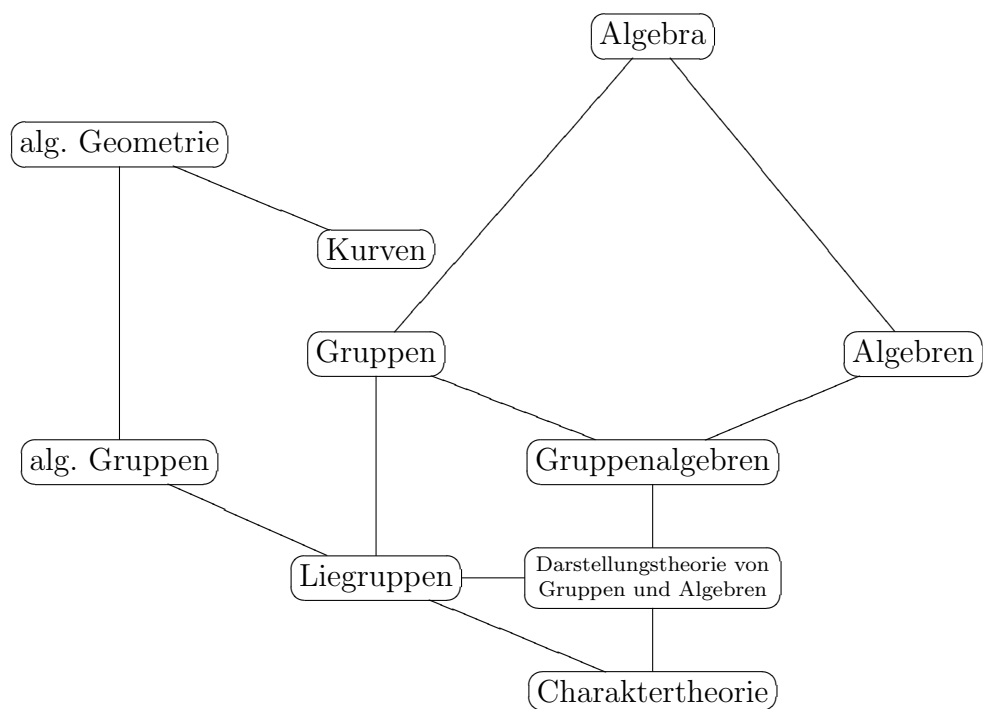
Notation

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$	Darstellungen
$\mathrm{GL}_n(R)$	die General linear group des Rings R der Dimension n
$g \sim h$	g ist zu h (in G) konjugiert, d.h. $\exists x \in G : g = x^{-1}hx$
$ G $	Ordnung von G
${}^g H$	$\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$
H^g	$\{g^{-1}hg \mid h \in H\}$
$\mathrm{Syl}_p(G)$	die Menge der p -Sylowgruppen von G
$C_G(t)$	der Zentralisator von t in G
S_Ω	die symmetrische Gruppe auf der Menge Ω (vgl. (1.3))
S_n	die symmetrische Gruppe auf n Punkten (vgl. (1.4))
${}_R R$	der linksreguläre Modul R (vgl. Seite 5)
R_R	der rechtsreguläre Modul R
$\mathrm{Ann}_R(M)$	der Annulator des R -Moduls M (vgl. Seite 5)
$\mathrm{End}_R(M)$	der Endomorphismenring des R -Moduls M (vgl. Seite 5)
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	der Homomorphismenring der R -Module M, N von M nach N (vgl. Seite 5)
$V \cong W$	der Modul bzw. die Algebra V ist zu W isomorph
$M \oplus N$	direkte Summe von M und N
$\mathrm{rk}_R(M)$	der Rang des R -Moduls M (vgl. Seite 6)
IB	Integritätsbereich
$\mathrm{Grad}(\mathfrak{X})$	siehe Def. (1.9) a)
$\mathrm{Aut}_R(V)$	der Automorphismenring des R -Moduls V (vgl. Def. (1.9))
VR	Vektorraum
RG	die Gruppenalgebra der Gruppe G über R
$R[[X]]$	Ring der Laurentpolynome
R^*	die Einheiten des Rings R
$W \leqslant_R V$	W ist Teilraum von V aufgefasst als R -Moduln
$\mathrm{char} K$	die Charakteristik von K
$\sqrt[G]{1}$	bezeichnet eine $ G $ -te primitive Einheitswurzel
$\mathcal{Z}(A)$	das Zentrum von A (vgl. Seite 15)
E_n	$n \times n$ Einheitsmatrix
M^{opp}	der oppositäre Modul (siehe Algebra II)

δ_{ij}	Kroneckerdelta
$\mathcal{C}(G)$	die Menge der Konjugiertenklassen von G
\widehat{C}_i	Klassensumme (vgl. (2.1))
l.u.	linear unabhängig
l.a.	linear abhängig
χ_V	der durch V bewirkte Charakter (vgl. Def. (2.2))
$\text{Irr}_K(G)$	die irreduzibelen K -Charaktere von G
$\mathcal{C}_K(G)$	der Raum der K -Klassenfunktionen
\mathfrak{R}	die reguläre Darstellung
ϱ	der reguläre Charakter
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen a_1, \dots, a_n
Kern χ	Kern eines Charakters (siehe Def. (2.16))
h^G	$\{ghg^{-1} \mid \forall g \in G\}$
$[g, h]$	$= ghg^{-1}h^{-1}$. Kommutator von g, h .
$\langle g_1, \dots, g_k \rangle$	die von den Elementen g_1, \dots, g_k erzeugte Gruppe
G'	$\langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$. Die Kommutatorgruppe

Kapitel 1

Strukturen von Gruppenalgebren



§1 Einführung

VORAUSSETZUNGEN: G Gruppe, R Integritätsbereich. Hier meist $R = \mathbb{C}$.

(1.1) DEFINITION:

Eine Matrixdarstellung von G vom Grad n über R ist ein Homomorphismus

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(R).$$

Der Charakter χ von \mathfrak{X} ist die Abbildung

$$\chi : G \rightarrow R; g \mapsto \text{Spur}(\mathfrak{X}(g)).$$

$n [= \chi(1)]$ heißt der **Grad** von χ . Ein R -Charakter von G ist der Charakter einer Matrixdarstellung von G über R . \square

BEMERKUNG:

Ein Charakter ist eine **Klassenfunktion** von G . D.h. sind $g, h \in G$ konjugiert (d.h. $\exists x \in G$ mit $g = x^{-1}hx$), dann sind $\chi(g) = \chi(h) \forall R$ -Charaktere. \square

Sei G endlich.

SATZ (BURNSIDES $p^a q^b$ SATZ):

Sei $|G| = p^a q^b$ mit $p, q \in \mathbb{P} \Rightarrow G$ ist auflösbar. \square

SATZ (FROBENIUS):

Sei $H \not\cong G$, $H \neq \{1\}$ mit $H \cap {}^g H = \{1\} \forall g \in G \setminus H$. Dann $\exists N \trianglelefteq G$ mit $G = NH$ und $N \cap H = \{1\}$. \square

SATZ (FEIT-THOMPSON):

Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar. \square

SATZ (Z^* -THEOREM VON GLAUBERMANN):

Sei $t \in G$ eine **Involution** (d. h. $|t| = 2$) und $S \in \text{Syl}_2(G)$ mit $t \in S$. Ist t zu keinem Element aus $S \setminus \{t\}$ konjugiert, dann ist G nicht einfach. \square

SATZ:

Sei G endliche nicht abelsche einfache Gruppe. $t \in G$ Involution mit $C_G(t) = \langle t \rangle \times C_2 \Rightarrow G \cong A_5$. \square

SATZ (JANKO '63):

Sei G eine endliche einfache Gruppe mit abelscher 2-Sylowgruppe, $t \in G$ Involution mit $C_G(t) \cong \langle t \rangle \times A_5 \Rightarrow |G| = 175560$. $G = J_1$ \square

(1.2) **DEFINITION:**

Seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Matrixdarstellungen von G über R vom Grad n . $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sind **äquivalent**, wenn $z \in \text{GL}_n(R)$ existiert mit $\mathfrak{X}(g) = z^{-1}\mathfrak{Y}z \forall g \in G$ \square

BEMERKUNG:

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ äquivalent \Rightarrow sie haben den gleichen Charakter. \square

(1.3) BEISPIEL:

1. Die Darstellung

$$\chi : G \rightarrow \text{GL}_1(R) ; g \mapsto 1$$

heißt *triviale Darstellung* von G . Der zugehörige Charakter der *triviale Charakter*.

2. G operiere auf der Menge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ d. h. wir haben einen Homomorphismus $\pi : G \rightarrow S_\Omega$. Für $g \in G$ sei $\Pi(g) \in R^{n \times n}$ die $n \times n$ Permutationsmatrix zu $\pi(g) \in S_\Omega$ d.h.

$$\Pi(g)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i = \pi(g)(\omega_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Pi : G \rightarrow \text{GL}_n(R)$ heißt die zugehörige *Permutations(matrix-)darstellung*. □

(1.4) BEISPIEL:

$G = S_3$ operiert auf $\mathfrak{Z} = \{1, \dots, 3\}$, $u = (1\ 2\ 3)$, $s = (1\ 2) \in G$. $G = \langle u, s \rangle$
 \rightsquigarrow Permutationsmatrixdarstellung

$$M(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Äquivalent dazu ist \widetilde{M} via Z

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M}(u) = Z^{-1}M(u)Z = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\widetilde{M}(s) = Z^{-1}M(s)Z = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Wir erhalten zwei neue Darstellungen von G durch „Kästchenbildung“. Z.B.

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(1.5) DEFINITION:

Sei R ein Körper. $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{GL}_n(R)$ heißt *reduzibel*, wenn ein $Z \in \text{GL}_n(R)$ existiert mit

$$Z^{-1}\mathfrak{X}(g)Z = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{X}_1(g) & * \\ \hline 0 & \mathfrak{X}_2(g) \end{array} \right)$$

In diesem Fall sind

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{GL}_n(R), i = 1, 2$$

Matrixdarstellungen von G über R . \mathfrak{X} heißt *irreduzibel*, falls \mathfrak{X} nicht reduzibel ist. Der zugehörige Charakter heißt *irreduzibler Charakter*. \square

Sei R ein Körper und G eine endliche Gruppe, dann existieren (bis auf Äquivalenz) nur endlich viele irreduzibele Darstellungen von G über R und somit auch nur endlich viele irreduzibele Charaktere. Gilt $R = \mathbb{C}$ so kann man die Charaktertafel von G (vgl. Kapitel 2) im ATLAS OF FINITE GROUPS [CCN+85] finden. Wie z.B. das „Monster“: $|M| \approx 8 * 10^{53}$ mit 194 Konjugiertenklassen.

(1.6) BEMERKUNG (ADDITIVITÄT VON CHARAKTEREN):

Ist \mathfrak{X} äquivalent zu $\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1 & * \\ 0 & \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix}$, χ der Charakter von \mathfrak{X} und χ_i der Charakter von \mathfrak{X}_i für $i = 1, 2$, so gilt $\chi = \chi_1 + \chi_2$. \square

(1.7) BEISPIEL:

Die Reduzibilität hängt von R ab! Sei $G = S_3$, $u = (123)$ und $s = (12)$.

$N(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $N(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. N ist genau dann reduzibel, wenn $1 + 1 + 1 = 0$ in R ist.

BEWEIS: Direktes Nachrechnen. \square

§2 Moduln und Algebren

1. Jeder Ring hat 1.

2. Sei R ein Ring.

Eine abelsche Gruppe M heißt *R -Linksmodul*, falls eine Abbildung $R \times M \rightarrow M$ definiert ist, so dass gilt:

- (a) $r(m + n) = rm + rn \quad \forall r \in R, m, n \in M$
- (b) $(r + s)m = rm + sm \quad \forall r, s \in R, m \in M$
- (c) $(rs)m = r(sm) \quad \forall r, s \in R, m \in M$
- (d) $1m = m \quad \forall m \in M$

Analog sind R -Rechtsmoduln definiert.

3. R selbst ist R -Modul:

${}_R R$: R aufgefasst als R -Linksmodul (der reguläre Modul)

4. M sei R -Modul.

M heißt genau dann endlich erzeugt (e.e), wenn $m_1 \dots m_n \in M$ existieren, so dass

$$M = \sum_{i=1}^n Rm_i$$

gilt.

5. $\text{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \forall m \in M\}$ heißt Annulator vom M .

$\text{Ann}_R(M)$ ist zweiseitiges Ideal in R und M ist $R/\text{Ann}_R(M)$ -Modul.

6. Homo-, Endo-, Mono- und Isomorphismus etc. ist wie bei Vektorräumen definiert. Kern und Bild sind Untermoduln. Die Homomorphie-Sätze gelten.

$$\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$$

ist Ring. Es gilt die Linksschreibweise: $\varphi, \psi \in \text{End}_R(M)$ $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$ (erst φ dann ψ).

$$\begin{aligned} \text{End}_R(M) \times M &\rightarrow M \\ (\varphi, m) &\mapsto \varphi(m) \end{aligned}$$

macht M zu einem $\text{End}_R(M)$ -Modul.

7. M heißt genau dann einfach wenn $M \neq \{0\}$ und $\{0\}, M$ die einzigen Untermoduln sind.

(1.8) LEMMA (SCHUR):

Sei M ein einfacher R -Modul, so ist $\text{End}_R(M)$ ein Schiefkörper.

BEWEIS: Sei $0 \neq \varphi \in \text{End}_R(M)$. Dann gilt $\varphi(M) \neq \{0\}$. Da aber $\varphi(M) \leq M$ gilt und M einfach ist, ist $\varphi(M) = M$ und somit ist φ surjektiv. Weiter gilt $\text{Kern } \varphi \neq M$ da $\varphi \neq 0$. Also ist $\text{Kern } \varphi = \{0\}$ und φ ist auch injektiv. Zusammengefasst ist φ bijektiv, also invertierbar. \square

Ab jetzt ist M e.e. R -Modul.

8. Direkte Summen:

Seien $M_1 \dots M_n \leq M$. M ist genau dann die (innere) direkte Summe der M_i , wenn jedes $m \in M$ eine eindeutige Darstellung als

$$m = m_1 + \dots + m_n \text{ mit } m_i \in M_i \text{ f\"ur } i = 1 \dots n$$

hat. Schreibweise:

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

9. M heißt genau dann freier R -Modul, wenn

$$M = \{0\} \text{ oder } M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n \text{ mit } M_i \cong {}_R R \forall i.$$

BEMERKUNG:

(a) M ist genau dann frei, wenn M eine **Basis** besitzt. D.h. es existieren $m_1 \dots m_n \in M$ so, dass jedes $m \in M$ eine eindeutige Darstellung als

$$m = \sum_{i=1}^n r_i m_i \text{ mit } r_i \in R.$$

(b) Sei M frei mit Basis $m_1 \dots m_n$. Sei N ein R -Modul und $v_1 \dots v_n \in N$. Dann existiert genau ein R -Homomorphismus

$$\varphi : M \rightarrow N \text{ mit } \varphi(m_i) = v_i \forall 1 \leq i \leq n$$

(c) Mit **Rang** von M ($\text{rk}_R(M)$) wird die Anzahl der Elemente einer Basis bezeichnet.

BEWEIS: Wie bei Vektorräumen. □

Sei G Gruppe, R Integritätsbereich (IB) und V ein e.e. freier R -Modul.

(1.9) DEFINITION:

(a) Eine **Darstellung** von G auf V ist ein Homomorphismus

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$$

$$\text{Grad}(\mathfrak{X}) = \text{rk}_R(V)$$

- (b) Seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ Darstellungen von G auf den freien R -Moduln V, W .
 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ heißen genau dann *äquivalent*, wenn ein R -Modulisomorphismus $\varphi : V \rightarrow W$ existiert, für den gilt

$$\mathfrak{X}(g) = \varphi^{-1}\mathfrak{Y}(g)\varphi \quad \forall g \in G$$

also

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \mathfrak{X}(g) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Y}(g) \\ V & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & W \end{array} \quad \forall g \in G$$

BEMERKUNG:

Nach Wahl einer Basis von V erhalten wir aus \mathfrak{X} eine Matrixdarstellung von G über R .

- (c) $W \leq V$ (als R -Modul) heißt *G -invariant*, falls

$$\mathfrak{X}(g)(W) \leq W \quad \forall g \in G.$$

- (d) Sei R Körper. \mathfrak{X} heißt *reduzibel*, falls ein G -invarianter Untermodul $\{0\} \neq W \neq V$ existiert. Andernfalls heißt \mathfrak{X} *irreduzibel*.

BEMERKUNG:

Sei R ein Körper und V ein endlich dimensionaler R -Vektorraum (R -VR). Des weiteren sei \mathfrak{X} eine Darstellung von G auf V und $\{0\} \neq W \neq V$ ein G -invarianter Unterraum von V . Wählt man eine Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$ von W und ergänzt zu einer Basis $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ von V . Dann erhält man eine Matrixdarstellung $\tilde{\mathfrak{X}}$ von G bezüglich dieser Basis:

$$\tilde{\mathfrak{X}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathfrak{X}}(g)|_W & * \\ \hline 0 & \tilde{\mathfrak{X}}(g)|_{V/W} \end{array} \right) \begin{array}{l} w_1 \\ \dots \\ w_m \\ w_{m+1} \\ \dots \\ w_n \end{array}$$

□

10. Ein R -Modul A heißt *R -Algebra*, falls A ein Ring ist und

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \quad \forall r \in R, a, b \in A$$

gilt.

BEISPIEL:

$R^{n \times n}$ oder $\text{End}_R(V)$ für einen e.e. freien R -Modul V .

(1.10) DEFINITION:

Sei A eine R -Algebra und V ein e.e. freier R -Modul. Eine *Darstellung* von A auf V ist ein R -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : A \rightarrow \text{End}_R(V).$$

□

BEMERKUNG:

(a) Die Äquivalenz von Darstellungen von A ist analog zu (1.9)(b) definiert.

(b) Sei $\varphi : A \rightarrow \text{End}_R(V)$ eine Darstellung von A auf V . V wird zu einem A -Modul vermöge

$$av := \varphi(a)(v) \quad \forall a \in A, v \in V.$$

Sei umgekehrt V ein A -Modul der als R -Modul frei und endlich erzeugt ist, so definiere $\varphi : A \rightarrow \text{End}_R(V)$ durch

$$\varphi(a)(v) := av \quad \forall a \in A, v \in V.$$

Dann ist φ ein R -Algebrenhomomorphismus d.h. eine Darstellung von A auf V .

(c) Seien φ, ψ Darstellungen von A auf V bzw. W , wobei V, W e.e. freie R -Moduln sind. Dann sind φ, ψ genau dann äquivalent, wenn $V \cong W$ als A -Moduln gilt.

□

11. A sei R -Algebra und A_1, \dots, A_n zweiseitige Ideale. A heißt die (Algebren) direkte Summe der A_i , falls

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

(z.B. als abelsche Gruppen). Dann gilt $A_i A_j = \{0\}$ für $i \neq j$. Dies impliziert eine komponentenweise Multiplikation. Schreiben wir

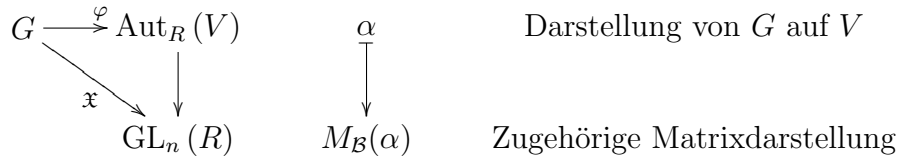
$$1 = e_1 + \dots + e_n \text{ mit } e_i \in A_i$$

dann sind die A_i R -Algebren mit Einselement e_i .

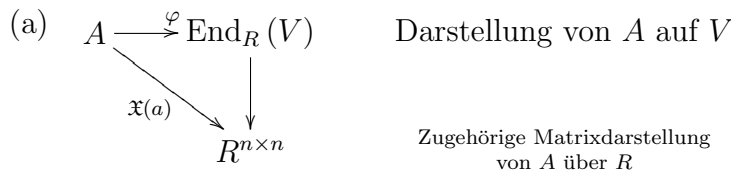
□

VORAUSSETZUNGEN: Sei R IB, V e.e. freier R -Modul, $\text{rk}_R(V) = n$ und \mathcal{B} Basis von V .

1. Sei G eine Gruppe:



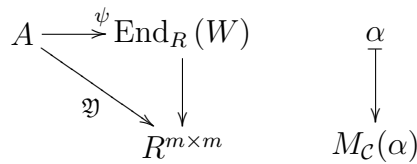
2. Sei A eine R -Algebra:



(b) V ist ein A -Modul vermöge φ

$$av = \varphi(a)(v) \quad a \in A, v \in V.$$

(c) Sei W ein endlich erzeugter freier R -Modul, $\text{rk}_R(W) = m$ und Basis \mathcal{C} .



BEMERKUNG:

W ist ein A -Modul vermöge ψ .

$$\mu : V \rightarrow WR\text{-linear}$$

$$\mu(av) = a\mu(v) \quad a \in A, v \in V$$

$$\text{Hom}_A(V, W) \cong \{X \in R^{m \times n} \mid X\mathfrak{x}(a) = \mathfrak{y}(a)X \quad \forall a \in A\}$$

$$\text{End}_A(V) \cong \{X \in R^{n \times n} \mid X\mathfrak{x}(a) = \mathfrak{x}(a)X \quad \forall a \in A\}$$

BEWEIS: Es gilt

$$\text{Hom}_A(V, W) = \{\mu \in \text{Hom}_R(V, W) \mid \mu(av) = a\mu(v) \quad a \in A, v \in V\}.$$

Die Abbildung

$$\text{Hom}_R(V, W) \rightarrow R^{m \times n}, \mu \mapsto M_{\mathcal{C}}^B(\mu)$$

ist ein R -Modulisomorphismus.

Sei $\mu \in \text{Hom}_R(V, W)$, $a \in A$, $v \in V$, $X := M_{\mathcal{C}}^B(\mu)$. Dann gilt

$$\mu(av) = a\mu(v) \iff X\mathfrak{x}(a)\varkappa_{\mathcal{B}}(v) = \mathfrak{y}(a)X\varkappa_{\mathcal{B}}(v)$$

wobei $\varkappa_{\mathcal{B}}(v)$ den Koordinatenvektor von v bezüglich \mathcal{B} bezeichnet. Da v beliebig war, folgt daraus die Behauptung. \square

§3 Der Gruppenring

VORAUSSETZUNGEN: Sei R ein Integritätsbereich und G eine Gruppe.

(1.11) DEFINITION:

RG ist der freie Modul über R mit der Basis G und Multiplikation:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} c_g g \quad a_g, b_g, c_g \in R \forall g \in G$$

$$\text{wobei } c_g = \sum_{\substack{h, k \in G \\ hk=g}} a_h b_k$$

RG heißt die *Gruppenalgebra* von G über R \square

Ab jetzt sind alle R -Moduln frei und endlich erzeugt.

BEMERKUNG:

$$(a) \quad G \hookrightarrow RG, \quad g \mapsto \sum_{x \in G} a_x x \quad \text{mit } a_x = \begin{cases} 1 & x = g \\ 0 & x \neq g \end{cases}$$

$$(b) \quad R \hookrightarrow RG, \quad r \mapsto r1$$

\square

BEISPIEL:

Sei $G = (\mathbb{Z}, +)$. Dann gilt

$$RG \cong R[[X]] \quad \text{Ring der Laurentpolynome} \quad //$$

Warnung: Gruppenringe nicht isomorpher Gruppen können isomorph sein.
Z.B.

$$\mathbb{C}V_4 \cong \mathbb{C}C_4$$

Wobei V_4 die Kleinsche Vierergruppe ist

$$V_4 = \{1, a, b, ab\} \quad a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$$

und C_4 die zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist

$$C_4 = \{1, x, x^2, x^3\} \quad x^4 = 1.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}V_4 &\rightarrow \mathbb{C}C_4 \\ 1 &\mapsto 1 \\ x &\mapsto \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}ab \\ x^2 &\mapsto b \\ x^3 &\mapsto \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}ab \end{aligned}$$

liefert einen \mathbb{C} -Algebrenisomorphismus.

$$\left| \begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 (ab)^2 + 2\frac{(1-i)(1+i)}{4}aab \\ &= \frac{i}{2}1 - \frac{i}{2}1 + b \\ &= b \quad // \end{aligned} \right|$$

□

BEMERKUNG:

Sei V e.e. freier R -Modul.

(a) Jede Darstellung

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Aut}_R(V)$$

lässt sich zu einer Darstellung

$$\widehat{\mathfrak{X}} : RG \rightarrow \text{End}_R(V)$$

linear fortsetzen:

$$\widehat{\mathfrak{X}} \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g \underbrace{\mathfrak{X}(g)}_{\in \text{Aut}_R(V)}$$

Vermöge $\widehat{\mathfrak{X}}$ wird V zu einem RG -Modul.

$$av := \widehat{\mathfrak{X}}(a)(v) \quad a \in RG, v \in V$$

Nach Wahl einer Basis von V erhält man eine Matrixdarstellung von RG über R .

(b) Sei V ein RG -Modul. Dann existiert eine Darstellung

$$\widehat{\mathfrak{X}} : RG \rightarrow \text{End}_R(V).$$

Einschränken auf G (es gilt $G \subseteq (RG)^*$) liefert eine Darstellung

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Aut}_R(V) = (\text{End}_R(V))^*$$

von G auf V .

(c) Ist $W \leq V$ (als R -Modul) und $\mathfrak{X}, \widehat{\mathfrak{X}}$ wie in (a) und (b), dann gilt:

$$\begin{aligned} & W \text{ ist } G\text{-invariant (d.h. } \mathfrak{X}(g)(W) \leq W \forall g \in G). \\ \iff & W \text{ ist } RG\text{-invariant (d.h. } \widehat{\mathfrak{X}}(a)(W) \leq W \forall a \in RG). \\ \iff & W \text{ ist } RG\text{-Unterm modul von } V \end{aligned}$$

(d) Zusammenfassung:

$$\begin{array}{ccc} \text{Matrixdarstellung} & \longleftrightarrow & \text{Matrixdarstellung} \\ \text{von } G \text{ über } R & & \text{von } RG \text{ über } R \\ \downarrow \uparrow \text{Basis} & & \downarrow \uparrow \text{Basis} \\ V = R^n & & V = R^n \\ \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \\ \text{R-Darstellung} & \longleftrightarrow & \text{R-Darstellung} \\ \text{von } G \text{ auf } V & & \text{von } RG \text{ auf } V \end{array} \longleftrightarrow V \text{ } RG\text{-Modul}$$

$$\text{Äquivalenz} \longleftrightarrow \text{Äquivalenz} \longleftrightarrow \text{Isomorphie}$$

$$\begin{array}{ccc} W \leq_R V & \longleftrightarrow & W \leq_{RG} V \\ G\text{-invariant} & & RG\text{-invariant} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} W \leq V \\ RG\text{-Unterm modul} \end{array}$$

$$\text{irreduzibel} \longleftrightarrow \text{irreduzibel} \longleftrightarrow \text{einfach}$$

Falls R
Körper

□

§4 Halbeinfache Moduln und Algebren

VORAUSSETZUNGEN: Sei K ein Körper, $\{0\} \neq A$ eine e.d. K -Algebra (z.B. $A = KG$ für eine endliche Gruppe G). A -Moduln seien A -Linksmoduln und als K -VR endlich erzeugt.

(1.12) DEFINITION:

V heißt genau dann *halbeinfach* (engl. *semisimple, completely reducible*) wenn jeder Untermodul ein Komplement in V hat. Das heißt

$$\forall W \leq V \exists W' \leq V \text{ mit } V = W \oplus W'$$

$\{0\}$ ist halbeinfach aber nicht einfach. □

(1.13) SATZ:

Sei V ein A -Modul, so sind

(a) V ist halbeinfach.

(b) V ist Summe von einfachen Untermoduln (Konvention: leere Summe ist $\{0\}$).

(c) V ist direkte Summe von einfachen Untermoduln.

äquivalent.

BEWEIS: Siehe Algebra II oder [Isa94] (1.10) und (1.11). \square

(1.14) BEMERKUNG:

Sei V halbeinfacher A -Modul und sei $W \leq V$, dann sind auch W und V/W halbeinfach.

BEWEIS: $V = W \oplus W'$ für ein $W' \leq V$ und es gilt $V/W \cong W'$. Es genügt also die Behauptung für Untermoduln zu zeigen.

Sei $U \leq W$ so folgt $U \leq V$. Da V aber halbeinfach ist existiert in V ein Untermodul U' für den $V = U \oplus U'$ gilt. Somit ist $W = U \oplus (U' \cap W)$ und die Behauptung ist gezeigt. \square

(1.15) DEFINITION:

A ist genau dann halbeinfach wenn ${}_A A$ halbeinfach ist. \square

(1.16) SATZ:

A ist genau dann halbeinfach wenn jeder e.e. A -Modul halbeinfach ist.

BEWEIS: „ \Leftarrow “ klar, da ${}_A A$ endlich erzeugt ist.

„ \Rightarrow “ Sei V e.e. A -Modul, d.h. es existieren $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $V = \sum_{i=1}^n Av_i$. Es genügt zu zeigen, dass Av_i halbeinfach ist $\forall i$ (wegen (1.13)). Betrachte

$$\varphi : {}_A A \rightarrow Av_i ; a \mapsto av_i$$

φ ist surjektiver A -Modulhomomorphismus. Der Homomorphiesatz liefert

$$Av_i \cong {}_A A / \text{Kern } \varphi$$

und (1.14) die Halbeinfachheit. \square

(1.17) SATZ (MASCHKE):

Sei G eine endliche Gruppe, dann gilt KG ist genau dann halbeinfach wenn $\text{char } K = 0$ oder $\text{char } K \nmid |G|$.

BEWEIS: „ \Rightarrow “ Übung.

„ \Leftarrow “ Sei $\text{char } K = 0$ oder $\text{char } K \nmid |G|$. Dann ist $|G|^{-1} \in K$. Sei V KG -Modul und $W \leq V$. Sei W' ein K -Komplement zu W in V , also $V = W \oplus W'$ als K -VR. $\vartheta : V \rightarrow V$ sei die Projektion von V auf W bezüglich der Zerlegung $V = W + W'$ ($v = w + w'$, $w \in W$, $w' \in W'$. $\vartheta(v) = w$). $\vartheta \in \text{End}_K(V)$. Setze

$$\varphi : V \rightarrow V ; v \mapsto |G|^{-1} \sum_{g \in G} g^{-1} \underbrace{\underbrace{\vartheta(gv)}_{\in V}}_{\in W}.$$

Dann gilt:

1. $\varphi \in \text{End}_K(V)$ ✓
2. $\varphi(W) \leq W$. Klar, da $W \leq_{A\text{-Modul}} V$
- 3.

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= w \quad \forall w \in W \\ \varphi(w) &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} g^{-1} \underbrace{\vartheta(gw)}_{\in W} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} g^{-1} gw = w \end{aligned}$$

4. $\varphi \in \text{End}_{KG}(V)$: Sei $h \in G$, $v \in V$

$$\begin{aligned} \varphi(hv) &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} g^{-1} \vartheta(ghv) \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} h(gh)^{-1} \vartheta((gh)v) \\ &= h |G|^{-1} \sum_{x \in G} x^{-1} \vartheta(xv) \\ &= h \varphi(v) \end{aligned}$$

5. Sei $W'' = \text{Kern } \varphi$ dann ist $W'' \leq_{KG} V$. Sei $w \in W \cap W''$, so folgt mit 3. $w = \varphi(w) = 0$

6. Sei $v \in V$.

$$\begin{aligned} &\stackrel{2.}{\Rightarrow} \varphi(v) \in W \\ &\stackrel{3.}{\Rightarrow} \varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0 \\ &\quad \text{d.h. } v - \varphi(v) \in W'' \\ &\Rightarrow v = \varphi(v) + (v - \varphi(v)) \in W + W'' \\ &\stackrel{5.}{\Rightarrow} V = W \oplus W'' \end{aligned}$$

□

A hat bis auf Isomorphie nur endlich viele A -Moduln.

(1.18) BEMERKUNG:

Sei V einfacher A -Modul, dann existiert ein $U \leq {}_A A$ mit $V \cong {}_A A/U$. Insbesondere ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A -Moduln endlich.

BEWEIS: Sei $0 \neq v \in V$. Betrachte $\varphi : {}_A A \rightarrow V; a \mapsto av$. $\varphi \in \text{Hom}_A({}_A A, V) \Rightarrow Av = \varphi({}_A A) \leq V$. $Av \neq 0$, da $v \in Av$. Daraus folgt, dass $Av = V$ ist, da V einfach ist. Setze $U = \text{Kern } \varphi$ und die 1. Behauptung ist gezeigt.

${}_A A$ besitzt eine Kompositionsreihe, da A e.d. K -VR ist. V ist isomorph zu einem Faktor einer Kompositionsreihe von ${}_A A$ und mit dem Satz von Jordan-Hölder (vgl. Algebra II) folgt auch die zweite Behauptung. □

(1.19) DEFINITION & BEMERKUNG:

(a) Sei V ein A -Modul, dann ist K zu einem Teilring von $\text{End}_A(V)$ isomorph.

(b) K heißt Zerfällungskörper für A , falls gilt:

$$\text{End}_A(V) \cong K \quad \forall \text{ einfache } A\text{-Moduln } V$$

BEWEIS: (a) Betrachte $K \rightarrow \text{End}_K(V); a \mapsto \sigma_a$ (skalare Multiplikation mit $a; \sigma_a = a \text{id}_V$). $\sigma_a \in \text{End}_A(V)$, denn sei $b \in A, v \in V$ so gilt:

$$\sigma_a(bv) = a(bv) = (ab)v = (ba)v = b\sigma_a(v)$$

□

(1.20) BEMERKUNG:

Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist K Zerfällungskörper von A .

BEWEIS: Sei V einfacher A -Modul, $\varphi \in \text{End}_A(V) \subseteq \text{End}_K(V)$. Sei $a \in K$ ein Eigenwert von φ . Dann ist $\text{Kern}(\varphi - \underbrace{\sigma_a}_{=a \text{id}_V}) \neq \{0\}$ und somit ist $\varphi - \sigma_a$

nicht invertierbar. Schließlich liefert das Lemma von Schur (1.8) $\underbrace{\varphi - \sigma_a}_{\in \text{End}_A(V)} = 0$.

□

Später zeigen wir, dass wenn G endlich ist, $\mathbb{Q}(\sqrt[G]{1}) =: K$ ein Zerfällungskörper von KG ist.

Mit $\mathcal{Z}(A) := \{a \in A \mid ab = ba \quad \forall b \in A\}$ sei das Zentrum von A bezeichnet.

$$\mathcal{Z}(K^{n \times n}) = \{a E_n \mid a \in K\} \cong K$$

(1.21) SATZ (ARTIN-WEDDERBURN):

Sei A eine halbeinfache K -Algebra und K ein Zerfällungskörper von A . Seien V_1, \dots, V_n Repräsentanten der Isomorphieklassen einfacher A -Moduln, $m_i = \dim_k(V_i)$. Setze

$$A_i := \sum_{\substack{S \subseteq A \\ S \cong V_i}} S \subseteq A \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $A_i \leq A$ d.h. A_i ist zweiseitiges Ideal und es gilt:

1. $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$
2. $A_i \cong K^{m_i \times m_i}$ für $i = 1, \dots, n$.
3. $\dim_K(A) = \sum_{i=1}^n m_i^2$
4. $n = \dim_K(\mathcal{Z}(A))$

BEWEIS: Siehe Algebra II oder [Isa94] (1.17)

BEWEISSKIZZE: Es ist klar, dass 3. und 4. aus 1. und 2. folgen.

zu $A_i \leq A$ zeige: ist $S \leq A$ einfach und $a \in A$, dann ist

$$Sa = \{0\} \text{ oder } Sa \cong S \text{ (als } A\text{-Linksmoduln).}$$

Denn für die Abb. $S \rightarrow Sa; s \mapsto sa$ gilt $\text{Kern} = S \iff Sa = \{0\}$.

1. folgt aus (1.13).

zu 2.: Aus (1.13) folgt

$$A_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} V_i \quad (*)$$

$$A_i \cong \text{End}_{A_i}(A_i)^{\text{opp}} \Rightarrow A_i \cong \underbrace{\text{End}_{A_i}(V_i)^{n_i \times n_i}}_{\text{End}_A(V_i)} \cong K^{n_i \times n_i} \quad (\dagger)$$

$n_i = m_i$:

$$n_i^2 \stackrel{(\dagger)}{=} \dim_K(A_i) \stackrel{(*)}{=} n_i m_i \Rightarrow m_i = n_i$$

□

(1.22) BEMERKUNG:

Notation und Voraussetzungen wie in (1.21).

$$A = \bigoplus_{i=1}^n A_i, \quad 1 = e_1 + \dots + e_n \text{ mit } e_i \in A_i \Rightarrow e_i e_j = \delta_{ij} e_i$$

(e_1, \dots, e_n) ist ein Satz von orthogonalen Idempotente (=Elemente der Ordnung 2). Es gilt

$$A_i = A e_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $1 \leq i \leq n$ sei $\mathfrak{X}_i : A \rightarrow \text{End}_K(V_i)$ die zum A -Modul V_i gehörige Darstellung. Dann gilt:

$$\mathfrak{X}_i(e_j) = \delta_{ij} \text{id}_{V_i} \text{ und } \mathfrak{X}_i(A) = \text{End}_K(V_i)$$

d.h. \mathfrak{X}_i ist surjektiv.

BEWEIS: Nach Definition ist V_i isomorph zu einem Untermodul von A_i . Es gelte also o.B.d.A. $V_i \leq A_i$. Beachte, dass $A_i = e_i A_i = A_i e_i$ gilt. Daraus folgt

$$e_j V_i \subseteq e_j A_i \subseteq e_j e_i A_i = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Somit ergibt sich $\mathfrak{X}_i(e_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei $v \in V_i = e_i A$ d.h. $v = e_i v$. Hieraus folgt

$$e_i v = e_i e_i v = e_i v = v \text{ für } v \in V_i$$

und schließlich

$$\mathfrak{X}_i(e_i) = \text{id}_{V_i} \Rightarrow \mathfrak{X}_i(A) = \mathfrak{X}_i(A_i).$$

Betrachte $\mathfrak{X}_i|_{A_i} : A_i \rightarrow \text{End}_K(V_i) \cong K^{m_i \times m_i}$. A_i ist zu $K^{m_i \times m_i}$ als einfache K -Algebra isomorph. Deshalb ist $\mathfrak{X}_i|_{A_i}$ injektiv und aus Dimensionsgründen auch bijektiv. \square

Kapitel 2

Die Charaktertafel

VORAUSSETZUNGEN: G ist eine endliche Gruppe und K ein Körper, der Zerfällungskörper von KG ist (z.B. K algebraisch abgeschlossen). Falls nichts anderes gesagt wird ist $\text{char } K = 0$ oder $\text{char } K \nmid |G|$.

§1 Die irreduzibelen Charaktere

DEFINITION:

$\mathcal{C}(G)$ bezeichnet die Menge der Konjugiertenklassen von G . □

(2.1) SATZ:

Die Anzahl der einfache KG -Moduln ist (bis auf Isomorphie) gleich der Anzahl der Konjugiertenklassen von G .

BEWEIS: Nach dem Satz von Maschke ist KG halbeinfach (1.17). Sei n die Anzahl der einfachen KG -Moduln. Nach (1.21) ist $n = \dim_K \mathcal{Z}(KG)$. Seien weiter C_1, \dots, C_m die Konjugiertenklassen von G und

$$\widehat{C}_i = \sum_{g \in C_i} g \in KG \quad (\text{Klassensumme})$$

Behauptung: $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_m$ ist Basis von $\mathcal{Z}(KG)$.

Beweis der Behauptung: $\widehat{C}_i \in \mathcal{Z}(KG)$ ist klar, da

$$x \sum_{g \in C_i} g = x \sum_{g \in C_i} x^{-1} g x = \left(\sum_{g \in C_i} g \right) x \quad \forall x \in G$$

Es ist auch klar, dass die \widehat{C}_i l.u. sind, da sie disjunkte Träger haben.

Die \widehat{C}_i $1 \leq i \leq n$ erzeugen auch $\mathcal{Z}(KG)$. Sei $a = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathcal{Z}(KG)$. Für

alle $h \in G$ gilt $h^{-1}ah = a$ also

$$\sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g (h^{-1}gh)$$

Somit ist für alle $g, h \in G$ $a_g = a_{h^{-1}gh}$ und damit ist die Behauptung gezeigt.
□

(2.2) DEFINITION:

Hier darf $\text{char } K$ beliebig sein.

(a) Sei V ein KG -Modul und $\mathfrak{X}_i : KG \rightarrow \text{End}_K(V)$ die zugehörige Darstellung. Dann heißt

$$\chi_V : KG \rightarrow K ; a \mapsto \text{Spur}(\mathfrak{X}(a))$$

der von V bewirkte **Charakter** von KG . $\chi_V \in \text{Hom}_K(KG, K)$, sodass χ_V eindeutig durch $\chi_V|_G : G \rightarrow K$ bestimmt ist.

$\chi_V|_G$ wird auch mit χ_V bezeichnet und heißt der durch V bewirkte **Charakter** von G .

Ein K -Charakter χ von G ist ein solches χ_V für einen KG -Modul V .

(b)

$$\begin{aligned} \text{Irr}_K(G) &:= \{\chi_s \mid S \text{ ist einfacher } KG\text{-Modul}\} \\ \text{Irr}(G) &:= \text{Irr}_\mathbb{C}(G) \end{aligned}$$

□

(2.3) KOROLLAR:

(a) $\text{Irr}_K(G)$ ist in $\text{Abb}(G, K)$ l.u.

(b) $|\text{Irr}_K(G)| = |\mathcal{C}(G)|$

(c) $\sum_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} \chi(1)^2 = |G|$

(d) G ist genau dann abelsch wenn $\chi(1) = 1 \quad \forall \chi \in \text{Irr}_K(G)$

BEWEIS: (a) Seien V_1, \dots, V_n Repräsentanten der einfachen KG -Moduln und \mathfrak{X}_i $1 \leq i \leq n$ die zugehörigen Darstellungen auf V_i . $\chi_i = \chi_{V_i}$. Seien die A_i wie in (1.22).

$$\begin{aligned} \stackrel{(1.22)}{\Rightarrow} \mathfrak{X}_i(A_i) &= \text{End}_K(V_i) \\ \mathfrak{X}_i(A_j) &= 0 \quad i \neq j \end{aligned}$$

$$\stackrel{(1.22)}{\Rightarrow} \exists a_i \in A_i \text{ mit } \text{Spur}(\mathfrak{X}_j(a_i)) = \delta_{ij}.$$

Seien $c_1, \dots, c_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n c_i \chi_i = 0$. Daraus folgt für $a \in KG$

$$\sum_{j=1}^n c_j \chi_j(a) = 0 \text{ und für } a = a_i \text{ schließlich } c_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n.$$

(b) Klar mit (2.1) und (a).

(c) Nach (1.21) gilt $KG \cong \bigoplus_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} K^{\chi(1) \times \chi(1)}$ und damit folgt die Behauptung.

(d) $\chi(1) = 1 \quad \forall \chi \in \text{Irr}_K(G)$

$$\stackrel{(c)}{\iff} |\text{Irr}_K(G)| = |G|$$

$$\stackrel{(b)}{\iff} |\mathcal{C}(G)| = |G|$$

$$\iff G \text{ abelsch.}$$

□

(2.4) DEFINITION:

Eine Abbildung $\lambda : G \rightarrow K$ heißt K -Klassenfunktion von G falls

$$\lambda(g) = \lambda(h) \quad \forall g, h \in G, g \sim h.$$

$\mathcal{Cf}_K(G)$ sei der Raum dieser Klassenfunktionen. □

(2.5) BEMERKUNG:

(a) $\text{Irr}_K(G)$ ist Basis von $\mathcal{Cf}_K(G)$

(b) Sei $\text{char } K = 0$ und $\lambda = \sum_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} n_\chi \chi$, $n_\chi \in K$. λ ist genau dann Charakter wenn alle $n_\chi \in \mathbb{N}$.

(c) Sei $\text{char } K = 0$ und W, V KG -Moduln, dann gilt

$$V \cong W \text{ (als } KG\text{-Moduln)} \iff \chi_V = \chi_W$$

BEWEIS: (a) $\text{Irr}_K(G)$ ist l.u. und $|\text{Irr}_K(G)| = |\mathcal{C}(G)|$

(b) + (c) seien M_1, \dots, M_k Repräsentanten der einfachen KG -Moduln. $\chi_i = \chi_{M_i}$. Seien $v_i, w_i \in \mathbb{N}$ mit

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k v_i M_i \text{ und } W \cong \bigoplus_{i=1}^k w_i M_i.$$

Daraus folgt

$$\chi_V = \sum_{i=1}^k v_i \chi_i \text{ und } \chi_W = \sum_{i=1}^k w_i \chi_i.$$

Da $\text{char } K = 0$ vorausgesetzt ist gilt

$$\chi_V = \chi_W \iff v_i = w_i \quad \forall i$$

□

(2.6) DEFINITION:

Sei $\psi = \sum_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} n_\chi \chi$ ein K -Charakter. Ist $n_\chi > 0$ so heißt χ (irreduzibeler) *Konstituent* von ψ .

□

§2 Die Charaktertafel

VORAUSSETZUNGEN: Ab jetzt gilt $\text{char } K = 0$.

(2.7) DEFINITION:

Sei $\text{Irr}_K(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ und seien g_1, \dots, g_k Vertreter der Konjugiertenklassen von G . Dann heißt

$$(\chi_i(g_j))_{1 \leq i, j \leq k} \in K^{k \times k}$$

die *K-Charaktertafel*.

Zeilen: Charaktere, Spalten: Konjugiertenklassen (in der Literatur gelegentlich auch transponiert. Manchmal werden noch zusätzliche Informationen zur Charaktertafel gezählt).

□

BEISPIEL:

$$\begin{array}{l} G = S_3 \\ K = \mathbb{C} \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & () & (12) & (123) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 G = A_4 \\
 K = \mathbb{C}
 \end{array}$$

	()	(12)(34)	(123)	(124)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

$\omega = \exp\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{array}{l}
 G = S_4 \\
 K = \mathbb{C}
 \end{array}$$

	()	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	1	-1	0	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	1	-1	1	1	-1

□

BEMERKUNG:

Charakterwerte sind algebraisch über \mathbb{Q} (sogar ganz).

□

BEMERKUNG:

Sei $\psi : S_4 \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq K$, $\psi(g) = |\text{Fixpunkte von } g|$. ψ ist Klassenfunktion.

	()	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
ψ	4	2	0	1	0

Man sieht leicht $\psi = \chi_1 + \chi_2$ und mit (2.6) folgt, das ψ Charakter ist.

□

(2.8) BEMERKUNG:

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$, \mathfrak{X} eine K -Darstellung von G und χ deren Charakter. Weiter sei $g \in G$ mit $n = |g|$. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{X}(g)$ ist ähnlich d.h. konjugiert zu einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix}
 \varepsilon_1 & & 0 \\
 & \ddots & \\
 0 & & \varepsilon_{\chi_1}
 \end{pmatrix}.$$

(b) $\varepsilon_i^n = 1 \quad \forall i$ d.h. die ε_i sind n -te Einheitswurzeln.

$$(c) \chi(g) = \sum_{i=1}^{\chi(1)} \varepsilon_i, |\chi(g)| \leq \chi(1).$$

$$(d) \chi(g) = \chi(1) \iff g \in \text{Kern } \mathfrak{X}.$$

$$(e) \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

BEWEIS: (a) Sei $H = \langle g \rangle$ dann ist H abelsch, also haben alle irred. Darstellungen von H den Grad 1. Daraus folgt

$$\mathfrak{X}(h) \cong \begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square \end{pmatrix} \forall h \in H \quad (\square \text{ } 1 \times 1 \text{ Block}).$$

$$(b) \begin{pmatrix} \varepsilon_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{\chi_1}^n \end{pmatrix} \sim \mathfrak{X}(g^n) = \mathfrak{X}(1) = E_{\chi(1)}.$$

$$(c) \chi(g) = \sum_{i=1}^{\chi(1)} \varepsilon_i \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\implies} |\chi(g)| = \sum_{i=1}^{\chi(1)} |\varepsilon_i| = \chi(1).$$

$$(d) \chi(g) = \chi(1) \iff \text{alle } \varepsilon_i = 1 \iff \mathfrak{X}(g) = E_{\chi(1)} \iff g \in \text{Kern } \mathfrak{X}.$$

$$(e) \chi(g) = \sum_{i=1}^{\chi(1)} \varepsilon_i, \mathfrak{X}(g^{-1}) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{\chi_1}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{\chi(1)} \varepsilon_i^{-1} \implies \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}, \text{ da } \varepsilon_i^{-1} = \overline{\varepsilon_i}.$$

□

§3 Die Orthogonalitätsrelationen

VORAUSSETZUNGEN: Wie in [Kapitel 2 §2](#). $\text{char } K = 0$ ($K \subseteq \mathbb{C}$).

Seien $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_k$ Vertreter der Äquivalenzklassen von Matrixdarstellungen über K und χ_1, \dots, χ_k die zugehörigen Charaktere. Sei $A = KG = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ mit A_i wie in [\(1.21\)](#).

$$A_i \leftrightarrow \chi_i$$

Seien $e_1 + \dots + e_k = 1$, $e_i \in A_i$ wie in (1.22). Sei \mathfrak{R} die von ${}_A A$ bewirkte Matrixdarstellung, die reguläre Darstellung von G und ϱ der Charakter von \mathfrak{R} . Wir wollen die e_i mittels der χ_i ausrechnen.

(2.9) LEMMA:

$$\varrho(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

BEWEIS: Für $g = 1$ klar.

Für $g \neq 1$ hat $\mathfrak{R}(g)$ als Matrix bezüglich G nur Nullen auf der Diagonalen, da $gx \neq x$ für $x \in G$ und daraus folgt

$$\text{Spur}(\mathfrak{R}(g)) = 0 = \varrho(g).$$

□

(2.10) LEMMA:

$$\varrho = \sum_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} \chi(1)\chi.$$

BEWEIS: A_i ist die direkte Summe von $\chi_i(1)$ isomorphen einfachen Moduln mit Charakter χ_i (1.21). □

(2.11) SATZ:

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$$

BEWEIS: Sei $e_i = \sum_{g \in G} a_g g$

$$\stackrel{(2.9)}{\Rightarrow} \varrho(e_i g^{-1}) = a_g |G|$$

$$\stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} a_g |G| = \varrho(e_i g^{-1}) = \sum_{j=1}^k \chi_j(1)\chi_j(e_i g^{-1})$$

$$\mathfrak{X}_j(e_i g^{-1}) = \mathfrak{X}_j(e_i)\mathfrak{X}_j(g^{-1}) \stackrel{(1.22)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \mathfrak{X}_j(g^{-1}) & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \chi_j(e_i g^{-1}) &= \chi_j(g^{-1})\delta_{ij} \\ \Rightarrow a_g |G| &= \chi_i(g^{-1})\chi_i(1) \end{aligned}$$

□

(2.12) SATZ (1. ORTHOGONALITÄTSRELATION):

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}$$

BEWEIS: Benutze $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ und setze Formel aus (2.11) an und vergleiche den Koeffizienten an $g = 1$. Damit ergibt sich für die linke Seite der Gleichung

$$\frac{\chi_i(1) \chi_j(1)}{|G|^2} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \frac{\chi_i(1)^2}{|G|} \delta_{ij}$$

□

(2.13) DEFINITION:

Sei $K = \mathbb{C}$. Für $\lambda, \mu \in \text{cf}_K(G)$.

$$(\lambda, \mu) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda(g) \overline{\mu(g)}$$

□

(2.14) BEMERKUNG:

(a) (\cdot, \cdot) ist hermitesches Skalarprodukt auf $\text{cf}_K(G)$ und $\text{Irr}(G)$ ist diesbezüglich eine ONB.

(b) Ist $\lambda = \sum_{i=1}^k c_i \chi_i \in \text{cf}_K(G)$ dann ist $c_i = (\lambda, \chi_i)$ d.h. die Zerlegung von λ kann leicht aus der Charaktertafel von G bestimmt werden.

(c) Die Orthogonalitätsrelationen sind auch nützlich zum berechnen der Charaktertafel, insbesondere wenn schon große Teile bekannt sind.

(d) Sind χ, ψ Charaktere von G , dann ist

$$(\chi, \psi) = (\psi, \chi) \in \mathbb{N}$$

und es gilt

$$\chi \text{ irred.} \iff (\chi, \chi) = 1.$$

(e) Sei $\chi = \sum_{i=1}^k z_i \chi_i$, $z_i \in \mathbb{Z}$ ein verallgemeinerter Charakter, dann gilt

$$\chi \in \text{Irr}(G) \iff (\chi, \chi) = 1 \text{ und } \chi(1) > 0.$$

Dies ist wichtig für die Anwendung des LLL-Algorithmus (produziert viele Charaktere und sucht \mathbb{Z} -Linearkombinationen mit kleiner Norm).

(f) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ dann gilt

$$\text{Irr}_K(G) = \text{Irr}(G) (= \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G))$$

BEWEIS: (d) Schreibe $\chi = \sum_{i=1}^k n_i \chi_i$ und $\psi = \sum_{i=1}^k m_i \chi_i$ mit $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ dann gilt

$$(\chi, \chi) = \sum_{i=1}^k n_i^2, \quad (\chi, \psi) = \sum_{i=1}^k n_i m_i.$$

(f) Sei $\chi \in \text{Irr}_K(G)$ dann ist χ aber auch \mathbb{C} -Charakter und aus (d) folgt, dass $\chi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$. □

Die 2. Orthogonalitätsrelation ist äquivalent zur Ersten aber manchmal besser anwendbar.

(2.15) SATZ (2. ORTHOGONALITÄTSRELATION):

Seien $g, h \in G$ dann gilt

$$\sum_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} \chi(g)\chi(h^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g \not\sim h \\ |C_G(g)| & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEIS: Sei $X = (\chi_i(g_j))_{i,j}$ die Charaktertafel. Seine weiter $\bar{X} = (\chi_i(g_j^{-1}))_{i,j}$

und $C = \text{diag} \left(\underbrace{\frac{|G|}{|C_G(g_1)|}}_{\substack{\# \text{ Elemente der} \\ \text{Konj. Klasse}}}, \dots, \frac{|G|}{|C_G(g_k)|} \right)$

Aus (2.12) (1. Ortho.) folgt

$$E_k = \frac{1}{|G|} X (C \bar{X}^t).$$

Aus der Tatsache, dass eine Matrix mit ihrer Inversen vertauschbar ist folgt

$$E_k = \frac{1}{|G|} (C \bar{X}^t) X.$$

Und daraus ergibt sich

$$\bar{X}^t X = \text{diag} (|C_G(g_1)|, \dots, |C_G(g_k)|).$$

Ganz nebenbei ergibt sich, dass man die Klassenlängen bzw. Zentralisatorordnungen leicht aus der Charaktertafel bestimmen kann. □

BEISPIEL:

$|S_3| = 6$

Klassenlänge	1	3	2
$ C_G(g_i) $	6	2	3
	()	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	$\boxed{1}$	$\boxed{-1}$	1
χ_3	$\boxed{1}$	$\boxed{\boxed{0}}$	$\boxed{\boxed{-1}}$

1 gegebene Werte (triv. Charakter bzw. Übungsaufgabe)

$\boxed{}$ aus $\sum \chi(1)^2 = |G|$

$\boxed{}$ 1. Orthogonalitätsrelation

$\boxed{\boxed{}}$ 2. Orthogonalitätsrelation

□

§4 Charaktertafel und Faktorgruppen

VORAUSSETZUNGEN: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ Zerfällungskörper von KG und invariant unter komplexer Konjugation.

(2.16) DEFINITION:

Sei χ ein K -Charakter von G .

$$\text{Kern } \chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

□

(2.17) BEMERKUNG:

(a) Kern $\chi \trianglelefteq G$.

(b) Sei χ Charakter, dann gilt

$$\text{Kern } \chi = \bigcap \{\text{Kern } \psi \mid \psi \text{ ist irred. Konstituent von } \chi\}.$$

(c) $\bigcap_{\chi \in \text{Irr}_K(G)} \text{Kern } \chi = \{1\}$.

BEWEIS: (a) Nach (2.8)(d) gilt

$$\chi(g) = \chi(1) \iff g \in \text{Kern } \chi$$

(für χ ist Charakter von \mathfrak{X}) und daraus folgt die Behauptung.

(b) Sei $\chi = \sum_{n_\psi \neq 0} n_\psi \psi$ die Zerlegung von χ in irreduzibele Konstituenten und sei $g \in \text{Kern } \chi$ so gilt

$$\chi(1) = |\chi(1)| = |\chi(g)| \leq \sum_{n_\psi \neq 0} n_\psi |\psi(g)| \stackrel{(2.8)(c)}{\leq} \sum_{n_\psi \neq 0} n_\psi |\psi(1)| = \chi(1).$$

Da links und rechts jeweils $\chi(1)$ steht, herrscht überall Gleichheit und somit gilt

$$\text{Kern } \chi \subseteq \bigcap \{ \text{Kern } \psi \mid \psi \text{ ist irred. Konstituent von } \chi \}.$$

„ \supseteq “ ist klar.

(c) Die Spalten der Charaktertafel sind l.u.

Alternativ kann man auch (b) benutzen und für $\chi = \rho(= \sum_{\psi \in \text{Irr}_K(G)} \psi(1)\psi)$ wählen.

□

(2.18) SATZ:

Sei $N \trianglelefteq G$. Dann gilt

(a) Ist χ Charakter von G mit $N \leq \text{Kern } \chi$ so ist χ konstant auf den Nebenklassen von N in G .

$$\chi(gh) = \chi(g) \quad \forall g \in G, n \in N$$

Die Funktion $\tilde{\chi} : G/N \rightarrow K, \tilde{\chi}(gN) := \chi(g)$ ist ein Charakter von G/N . Zusatz:

$$\chi \text{ irred.} \leftrightarrow \tilde{\chi} \text{ irred.}$$

(b) Ist $\tilde{\chi}$ ein Charakter von G/N und $\chi : G \rightarrow K ; g \mapsto \tilde{\chi}(gN)$ dann ist χ ein Charakter von G mit $N \leq \text{Kern } \chi$. χ heißt **Inflation von $\tilde{\chi}$ auf G** .

(c) $\text{Irr}_K(G/N) = \{ \tilde{\chi} \mid \chi \in \text{Irr}_K(G) \text{ mit } N \leq \text{Kern } \chi \}$

$$|G/N| = \sum_{\substack{\chi \in \text{Irr}_K(G) \\ N \leq \text{Kern } \chi}} \chi(1)^2$$

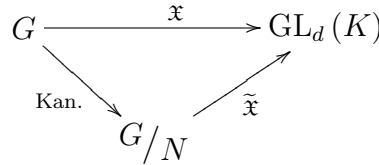
$$(d) N = \bigcap_{\substack{\chi \in \text{Irr}_K(G) \\ N \leq \text{Kern } \chi}} \text{Kern } \chi.$$

Anwendung zur S_3 :

	()	(12)	(123)	
χ_1	1	1	1	\rightsquigarrow
χ_2	1	-1	1	

	N	$(12)N$	
$\widetilde{\chi}_1$	1	1	
$\widetilde{\chi}_2$	1	-1	

BEWEIS: Seien $\chi = \chi_{\mathfrak{X}}$, $d := \chi(1)$ und $N \leq \text{Kern } \chi = \text{Kern } \mathfrak{X}$.



(a)+(b) $\widetilde{\chi}$ ist der Charakter von $\widetilde{\mathfrak{X}}$ und es gilt: \mathfrak{X} irred. \leftrightarrow $\widetilde{\mathfrak{X}}$ irred. da Bild $\mathfrak{X} = \text{Bild } \widetilde{\mathfrak{X}}$.

(c) folgt aus (a)+(b).

(d) folgt aus (c) und (2.17)(c).

□

BEISPIEL:

Seien $G = S_4$ und $N = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} (= ()^G \cup (12)(34)^G)$.
Es gilt

$$N \leq \text{Kern } \chi_1, \text{Kern } \chi_3, \text{Kern } \chi_5$$

	()	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)	
χ_1	1	1	1	1	1	
χ_3	2	0	2	-1	0	
χ_5	1	-1	1	1	-1	

\rightsquigarrow

	$()N$	$(12)N$	$(123)N$	
$\widetilde{\chi}_1$	1	1	1	$G/N \cong S_3$
$\widetilde{\chi}_3$	2	0	-1	
$\widetilde{\chi}_5$	1	-1	1	

(2.19) SATZ:

Sei G' die Kommutatorgruppe von G . Dann gilt

$$G' = \bigcap_{\substack{\lambda \in \text{Irr}_K(G) \\ \lambda(1)=1}} \text{Kern } \lambda$$

und

$$|G/G'| = |\{\lambda \in \text{Irr}_K(G) \mid \lambda(1) = 1\}|.$$

BEWEIS: Sei $\lambda \in \text{Irr}_K(G)$, dann gilt:

$$G' \leq \text{Kern } \lambda \iff G/\text{Kern } \lambda \text{ abelsch} \stackrel{(2.3)(d), (2.18)}{\iff} \lambda(1) = 1.$$

Der Rest folgt aus (2.18)(c)+(d). □

§5 Charaktertafel und Zentrum

VORAUSSETZUNGEN: Wie in Kapitel 2 §5 .

SCHREIBWEISE: Sei $H \leq G$, $\chi \in \text{cf}_K(G)$, dann ist

$$\chi_H : H \rightarrow K ; h \mapsto \chi(h).$$

Ist χ Charakter der Darstellung \mathfrak{X} von G , so ist χ_H Charakter der Darstellung $\mathfrak{X}|_H$ von H .

(2.20) DEFINITION:

Sei χ ein Charakter von G , so heißt

$$\mathcal{Z}(\chi) := \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$$

das Zentrum von χ . □

(2.21) LEMMA:

Sei \mathfrak{X} eine Matrixdarstellung von G über K mit Charakter χ , dann gilt:

(a) $\mathcal{Z}(\chi) = \{g \in G \mid \mathfrak{X}(g) = \varepsilon E \text{ für } \varepsilon \in K\}$

(b) $\mathcal{Z}(\chi) \leq G$

(c) $\chi_{\mathcal{Z}(\chi)} =$

- §6** Ganze algebraische Zahlen
- §7** Die zentralen Charaktere
- §8** Strukturkonstanten und Charaktertafel
- §9** Endomorphismusalgebra von Permutationsmoduln

Kapitel 3

Konstruktion von Charakteren

- §1 Einige Konstruktionen
- §2 Der Frobenius-Schur Indikator
- §3 Involutionen
- §4 Der Satz von Burnside-Brauer-Steinberg
- §5 Charaktere von direkten Produkten
- §6 Permutationscharaktere
- §7 Frobeniusgruppen
- §8 Der Satz von Mackey
- §9 Die irreduzibelen Darstellungen von S_n

Kapitel 4

Clifford Theorie

- §1 Der Satz von Clifford
- §2 Projektive Darstellungen
- §3 Fortsetzbarkeit von Darstellungen
- §4 Der Schursche Multiplikator

Kapitel 5

Der Brauersche Induktionssatz

- §1 Brauersche Charakterisierung von Charakteren
- §2 Defekt-0-Charaktere
- §3 Zerfällungskörper
- §4 Burnsidess Verlagerungssatz
- §5 Der Satz von Brauer-Suzuki

Anhang

Stichwortverzeichnis

A

Algebra	
R -	7
direkte Summe	8
Gruppen-	10
halbeinfach	13
Annulator	5

C

Charakter	2, 20
K -	20
Inflation	29
irreduzibel	4
triviale	3
verallgemeinerter	26
Zentrum	31
Charaktertafel	
K -	22

D

Darstellung	6, 8
äquivalent	2, 7
irreduzibel	4, 7
Matrix-	1
Permutations(matrix)-	3
reduzibel	4, 7
regulär	25
triviale	3

G

Grad	2
------	---

I

Involution	2
------------	---

K

Klassenfunktion	2
K -	21
Klassensumme	19
Kommutatorgruppe	31
Konjugiertenklassen	19
Konstituent	22

M

Modul	
G -invariant	7
(R) -Links-	4
(R) -Rechts-	5
(innere) direkte Summe	6
Basis	6
$e.e$	5
einfach	5
endlich erzeugt	5
freier	6
halbeinfach	12
Komplement	12
Rang	6
regulär	5

Z

Zerfällungskörper	15
-------------------	----

Literaturverzeichnis

- [CCN⁺85] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson. An ATLAS of Finite Groups. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [Col90] M. J. Collins. Representation Theorie of Finite Groups. Cambridge, 1990.
- [CR81] C. W. Curtis and I. Reiner. Methods of Representation Theorie with Applications to Finite Groups and Orders, Volume I. Wiley-Interscience, 1981.
- [Isa94] I. Martin Isaacs. Character Theorie of Finite Groups. Dover Publications, Inc., New York, 1994.
- [JL93] James and Liebeck. Representations and Characters of Groups. Camebridge, 1993.

